

# **Une aventure mathématique, le théorème de FERMAT**

Voici une BT2 sur les mathématiques ! Une bonne surprise.

Que les récalcitrants ne se détournent surtout pas. Il y a là de quoi intéresser tout le monde, car l'objet de ce livre est surtout une aventure humaine et, d'un chapitre à l'autre, chacun trouvera son domaine : maths, anglais, histoire, philo, français, nombre de disciplines sont ici concernées. Et bien des pages se lisent « comme un roman », puisqu'on y trouve tous les ingrédients d'un récit à suspense, et même un chagrin d'amour ....

Une aventure mathématique, le théorème de Fermat a été rédigé par une équipe pluridisciplinaire qui intégrait élèves et professeurs de deux lycées, l'un en France, l'autre en Angleterre.

Mots-clés:

conjecture, démonstration, Descartes, divertissement, Fermat, littérature, mathématiques, Pascal, Pythagore, recherche, sciences, Wiles

# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION</b>	<b>4</b>
<b>UNE ÉNIGME SANS PRÉCÉDENT</b>	<b>6</b>
<b>TOUT COMMENCE AVEC LE THEOREME DE PYTHAGORE</b>	<b>7</b>
Les triplets pythagoriciens	10
<b>PIERRE DE FERMAT, UN AMATEUR DE GÉNIE ?</b>	<b>12</b>
Un bourgeois fortuné	12
Un bourgeois érudit	13
Fermat jugé par ses contemporains	14
<b>EFFERVESCENCE CULTURELLE EN EUROPE</b>	<b>15</b>
Diversité politique et religieuse, développemant économique	15
Modernité baroque et classicisme	15
De la pensée théologique à la pensée scientifique	16
Les mathématiques au coeur de la pensée rationaliste	17
La recherche mathématique, un divertissement ?	18
<i>Fermat et Pascal jouent au jeu des partis : naissance du calcul des probalilités</i>	19
<b>AUX SOURCES DES MATHÉMATIQUES</b>	<b>21</b>
Pythagore	22
<i>La mystique des nombres dans l'oeuvre de Pythagore</i>	
Diophante d'Alexandrie	25
<b>UNE DEVINETTE DE TROIS CENT CINQUANTE ANS ENFIN RÉSOLUE 27</b>	
Premier épisode. La démonstration de Fermat pour le cas $n = 4$	27
Deuxième épisode : la démarche pas à pas	29
Troisième épisode : des tentatives plus globales	29
Quatrième et dernier épisode : le feu d'artifice final	30
Les courbes elliptiques	
Les formes modulaires	
Vers le dénouement	
<b>DE LA DIFFICULTÉ D'ÊTRE MATHÉMATICIEN</b>	<b>35</b>
Deux extraits en anglais et en français, du roman de Willim Boyd, <i>Brazzaville Beach</i>	36
<b>POUR EN SAVOIR PLUS</b>	<b>41</b>
Des livres, des revues, un document audiovisuel, un lieu à visiter	
<b>SOLUTIONS DES EXERCICES</b>	<b>43</b>
<b>INDEX</b>	<b>46</b>

**Auteurs** : Jeanne VIGOUROUX et " l'équipe Fermat " du lycée Elisée Reclus de Ste Foy la Grande (33) avec le chantier BT2 de l'ICEM

**Collaborateurs de l'auteur** : Marité BROISIN, Pierre HOUSEZ, Jeanne VIGOUROUX et leurs classes ainsi que Anne-Marie DEBOURG, Annie DHENIN, Annie FONTAINE, Charles GALICHET, Colette HOURTOLLE et Christine SEEBOTH.

**Coordination du projet** : Pierre HOUSEZ

**Iconographie** : P.Carpentier, S.Connac, A.Dhénin, H.Duvalard

**Maquette** : M.Billebault

<p><i>Nous remercions</i> : Madame Evelyne BARBIN, chercheuse en épistémologie, Maître de Conférences à Paris VII, animatrice à l'IREM de Créteil-Paris Sud.</p>
--

**Avertissement** : Ne vous étonnez pas des passages écrits en **anglais**, ( un bon test linguistique !). En effet, ce livre est le résultat d'un travail commun entre des élèves français du Lycée E.Reclus de Ste Foy la Grande (33) et de leurs correspondants de John Talbot School à Witchurch( Shopshire, England) . De plus le héros de la démonstration est anglais !

Enfin, n'oubliez pas , non plus, que la langue savante du XVIIe siècle est le latin , langue universelle à laquelle s'est substitué l'anglais dans les publications scientifiques contemporaines .

# INTRODUCTION

## " Coup de théâtre, Rebondissements, Suspense insoutenable " !

Les mathématiques défraient la chronique ! A la une des médias des pays du monde entier paraissent, en 1993, des titres dignes du meilleur thriller\*. Quelle est l'intrigue en cours ? je vous le donne en mille, un problème de mathématiques...vieux de 350 ans, enfin résolu !

Au départ une affirmation établie vers 1637 par **Pierre de Fermat** (1601-1665), parlementaire toulousain , mathématicien à ses heures, selon laquelle l'équation :  $x^n + y^n = z^n$  n'a pas de solution pour n puissance entière strictement supérieure à 2, x, y, z étant des inconnues appartenant aux nombres entiers. (Une telle affirmation s'appelle en langage mathématique une " conjecture\*\* ").

A l'arrivée une démonstration palpitante, présentée devant l'aréopage\*\*\* des plus grands mathématiciens du monde à Cambridge en juin 1993 et avril 1995 par **Andrew Wiles**, mathématicien à Princeton (USA).

Entre temps, tous les ingrédients d'une grande aventure de l'esprit, parcourue de nombreuses embûches , de fausses recherches, de fausses démonstrations, avec le secret espoir d'atteindre l'inaccessible, le " Graal " ( le Monde, le 24 juin 1993; Der Spiegel, 1996 )

Fermat :  
la conquête  
d'un Everest  
mathématique

*Le Nouvel Observateur - 17.07.1993.*

*Le triomphe de l'inaccessible*

$$a^n + b^n = c^{n^*}$$

Le théorème de Fermat enfin résolu ?

*Le Monde - 25.06.1993.*

*...It was my favorite Problem !*

*Die Zeit - 2.07.1993.*

\* **Thriller** : film à suspense, apte à provoquer chez le spectateur des sentiments, des émotions.

\*\* **Conjecture** : énoncé que l'on espère vrai et qui devient un théorème quand il est démontré.

\*\*\* **Aéropage** : assemblée de savants et de personnes compétentes.

## Qui est donc Fermat ?

En quoi Fermat est-il un savant typique de son temps, de l'Europe du XVII<sup>e</sup> siècle ?

Qui sont ses inspirateurs, Pythagore et Diophante ?

Comment est-on parvenu à résoudre une si vieille énigme ?

Est-il facile d'être mathématicien ?

Voilà quelques questions que nous allons examiner, après l'heureux dénouement d'une affaire qui a tant intrigué le monde des savants.

### THEOREME DE FERMAT

## La Joconde des maths

Le théorème posé par le Toulousain Fermat au XVII<sup>e</sup> siècle résistait à toutes les démonstrations. Un Anglais de Princeton vient d'en venir à bout. Effervescence chez les mathématiciens bordelais.

Sud-Ouest - 23.06.1993.



Asahi Shinbun - 9.04.1995.

### フェルマーの 最終定理

# 最新理論を融合し決着

## 谷山・志村予想が土台

フェルマーの最終定理を証明したワイルズ教授の論文の一部。高等数学でしか使われない珍しい記号がふたれている。

$W_2^0$  is via  $\chi_1/\chi_2$ , on  $W_1^0/W_1^0$  it is trivial and on  $W_2/W_1^0$  it is via  $\chi_2/\chi_1$ . These determine the filtration if either  $\chi_1/\chi_2$  is not quadratic or  $\rho_0|D$ , is not semisimple.

We define

$$V_2^{*d} = \{f \in V_2^0 : f=0 \text{ in } \text{Hom}(U_2/U_1^0, U_2/U_1^0)\}$$

$$H_{2,0}^*(Q_p, V_2) = \ker(H^1(Q_p, V_2) \rightarrow H^1(Q_p^{*nr}, V_2/W_1^0))$$

$$H_{2,0}^{*d}(Q_p, V_2) = \ker(H^1(Q_p, V_2) \rightarrow H^1(Q_p^{*nr}, V_2/V_2^{*d}))$$

$$H_{2,0}^{*d}(Q_p, V_2) = \ker(H^1(Q_p, V_2) \rightarrow H^1(Q_p, W_2/W_1^0) \oplus H^1(Q_p^{*nr}, k))$$

In the Selmer case we make an analogous definition for  $H_{2,0}^*(Q_p, W_2)$  by replacing  $V_2$  by  $W_2$ , and similarly in the strict case. In the flat case we use that there is a natural map

アンドリュー・ワイルズ教授 (同大提供)



フェルマーの最終定理を証明したワイルズ教授の論文の一部。高等数学でしか使われない珍しい記号がふたれている。

## The Joy of Math. or Fermat's Revenge

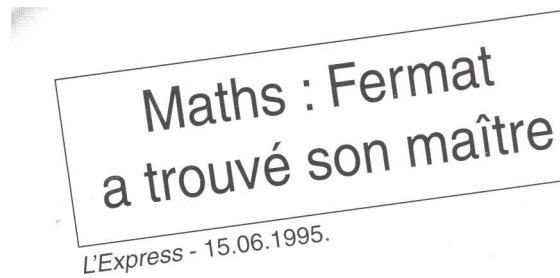
Time - 13.04.1988.

## La pause-théorème

La Dépêche - 25.06.1993.

# UNE ÉNIGME SANS PRÉCÉDENT

L'énigme commence avec la démonstration que Fermat prétend avoir réalisée et que l'on n'a jamais retrouvée, si elle a jamais existé. Vantardise ? Emphase ? Fougue de Gascon ? Quel homme facétieux ce Fermat ! Il est même baptisé par certains le d'Artagnan des mathématiques !



Cette conjecture, que certains ont baptisée " Joconde des mathématiques ", surprend aussi car elle paraît impossible à démontrer alors que l'énoncé est d'une simplicité enfantine.

Les plus grands mathématiciens, les amateurs férus de recherche mathématique, tentent d'affronter cet Everest indompté. Des " champions " s'affrontent, se jalourent, rivalisent à qui arrivera le premier à vaincre le défi lancé par Fermat.

Des récompenses sont offertes. L'Académie des Sciences de Paris propose une médaille d'or (1816) et une somme de 300 000 F (1850 ) à celui qui réussirait à démontrer la conjecture de Fermat. La société royale de Göttingen crée en 1908 le prix Wolfskhel dans le même but (elle reçoit deux à trois lettres par mois ).

Régulièrement de pseudo-démonstrations sont publiées dans la presse. La conjecture prend l'allure d'un véritable serpent de mer, une dimension mythique

D'européenne jusqu'au XIXe siècle, la " *contagion fermatique*\* " gagne le monde entier au XXe siècle ; européens, américains, japonais contribuent à maintenir le suspense .

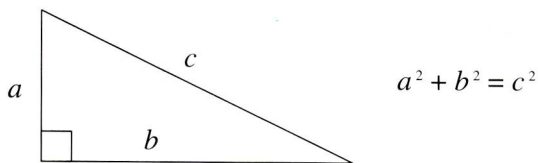
Enfin **Wiles** est arrivé... et réussit la démonstration. Beaucoup s'en réjouissent, mais certains sont nostalgiques de cette période de quête de l'impossible, sont déçus de voir s'effondrer le mythe, la " poule aux oeufs d'or ".

Non seulement cette recherche peut nous passionner par les surprises qu'elle a réservées pendant trois siècles et demi, mais encore elle a contribué à développer de nombreux domaines des mathématiques, en particulier la théorie des nombres, domaines d'une grande utilité dans les inventions technologiques contemporaines.

\* Expression employée par J.B. Hiriari-Urruty dans *La Dépêche* (août 1993)

# TOUT COMMENCE AVEC LE THÉORÈME DE PYTHAGORE...

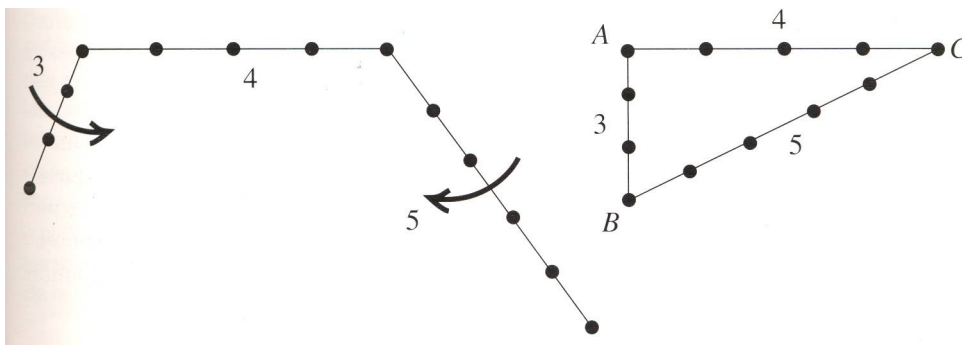
Le théorème de Pythagore affirme que : " Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des mesures des côtés de l'angle droit est égale au carré de la mesure de l'hypoténuse."



S'il porte le nom de PYTHAGORE (philosophe et mathématicien grec du VI<sup>e</sup> siècle av.J.6C.), il est cependant sûr que ce théorème était connu avant la civilisation grecque, par exemple des Babyloniens (des tablettes d'argile des Mésopotamiens en révèlent une connaissance précise à l'époque du roi Hammourabi, environ 18<sup>ème</sup> siècle avant JC.)

Certains livres d'histoire des mathématiques assurent que les Égyptiens formaient des angles droits en utilisant une ficelle partagée par des noeuds en douze intervalles de même longueur.

Dans ce cas c'est la réciproque du théorème qui est utilisée.



**On a :  $3^2 + 4^2 = 5^2$  car  $9 + 16 = 25$  donc le triangle est rectangle en A.**

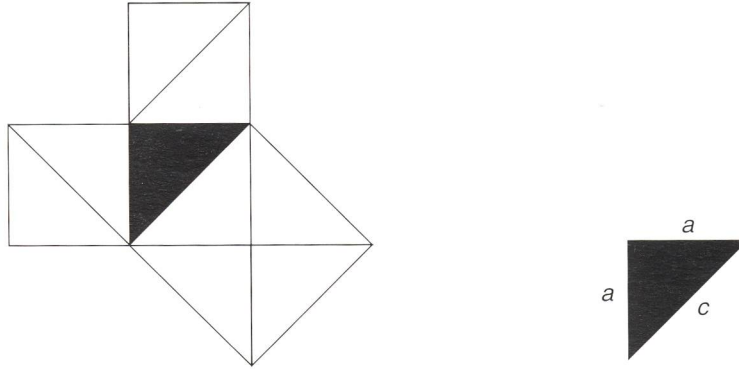
On connaît une centaine de démonstrations du théorème de Pythagore (mais pas celle de PYTHAGORE car ce dernier n'a laissé aucun écrit). Les exercices des pages 8-9 vous en proposent quelques unes.



### EXERCICE 1

D'abord un cas particulier : celui du triangle rectangle isocèle. Le dessin ci-dessous est constitué de 9 triangles rectangles isocèles égaux au triangle noir à droite. Vérifier en comparant les aires des trois carrés blancs que :

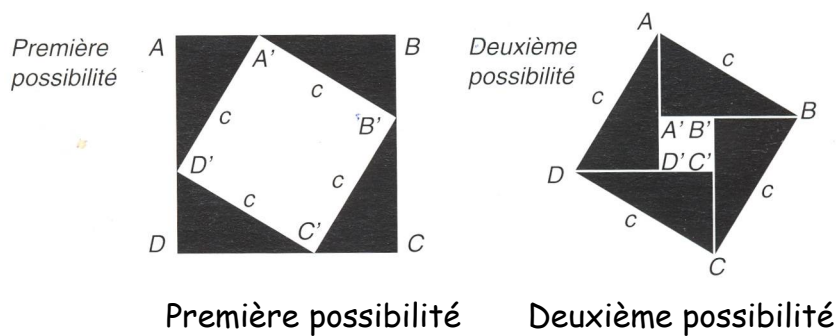
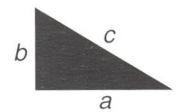
$$a^2 + a^2 = c^2$$



(solution p. 43 )

### EXERCICE 2

Une autre démonstration presque aussi " visuelle " mais qui traite du cas général. Il s'agit à partir d'un triangle rectangle, de le reproduire quatre fois pour construire un carré de côté l'hypoténuse de ce triangle. Il y a deux constructions possibles représentées ci- dessous :



Première possibilité

Deuxième possibilité

1. Vérifier d'abord que dans les deux cas, ABCD et A'B'C'D' sont bien des carrés.
2. Pour chacune des deux possibilités calculer de deux manières différentes l'aire du carré ABCD et en déduire à chaque fois que :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

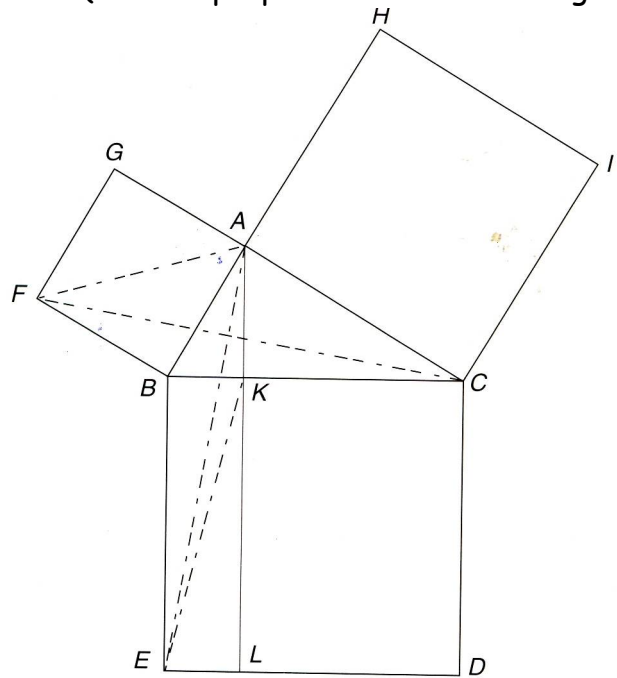
(solution p. 43 )



### EXERCICE 3

La démonstration plus célèbre : celle d'EUCLIDE (47<sup>ème</sup> proposition de son ouvrage les *Éléments*,) mathématicien grec du III<sup>o</sup> siècle av. J.-C.

Dans la figure ci-dessous,  $BFGA$ ,  $AHIC$ ,  $BCDE$  sont des carrés construits sur les côtés du triangle rectangle  $ABC$ . Cette figure est connue en FRANCE sous le nom de " Pont aux ânes " et dans les pays arabes de " figure de la mariée ".



1) Montrer que l'aire du rectangle  $BKLE$  est égale à l'aire du carré  $BFGA$

2) Démontrer de même que l'aire du rectangle  $KCDL$  est égale à l'aire du carré  $AHIC$ .

3) Conclure.

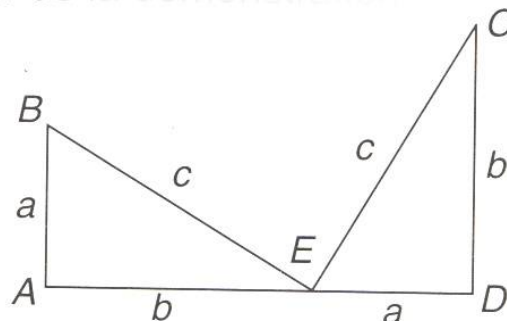
(solution p.43 )

### EXERCICE 4

Enfin pour terminer, un détour par la politique : l'auteur de la démonstration suivante est James Abraham GARFIELD qui fut président des USA en 1881.

1) Vérifier que  $ABCD$  est un trapèze rectangle.

2) Calculer de 2 manières différentes l'aire de  $ABCD$  et retrouver l'égalité de Pythagore.



(solution p.44 )

## Les triplets pythagoriciens

Considérons maintenant la relation de Pythagore comme une équation à trois inconnues  $a$ ,  $b$  et  $c$ , équation que l'on cherche à résoudre dans l'ensemble des entiers naturels\*  $\mathbb{N}$ . Résoudre cette équation revient à chercher, s'ils existent, les triangles rectangles dont les côtés ont **des longueurs qui sont des nombres entiers**.

Une solution de cette équation s'appelle un **triplet pythagoricien**. Le plus simple et le plus connu est le triplet (3, 4, 5) ou (4, 3, 5)). Nous l'avons déjà rencontré avec la corde à noeuds des égyptiens.

Dans ses " *Arithmétiques* ", DIOPHANTE\*\* expose une méthode (connue aussi d'EUCLIDE) pour obtenir des triplets pythagoriciens. (voir exercice 5)

On peut ainsi trouver toutes les solutions entières de l'équation de Pythagore (voir la liste ci-dessous de tous les triplets constitués de nombres entiers plus petits que 1000).

Remarque : Résoudre  $a^2 + b^2 = c^2$  revient à résoudre  $\frac{a}{c}^2 + \frac{b}{c}^2 = 1$  et donc de trouver tous les points à coordonnées rationnelles sur le cercle d'équation  $x^2 + y^2 = 1$ .

Ce qu'il faut retenir pour la suite c'est que :

**L'équation  $x^2 + y^2 = z^2$  a une infinité de solutions dans l'ensemble des nombres entiers.**

Vous brûlez de savoir ce qui se passe si l'exposant est supérieur à 2 ? Patience.....Monsieur de FERMAT arrive.

### EXERCICE 5

On choisit deux entiers  $m$  et  $n$  (avec par exemple  $m > n$ ).

1. Démontrer que :  $x = m^2 - n^2$ ,  $y = 2mn$  et  $z = m^2 + n^2$  est un triplet pythagoricien.

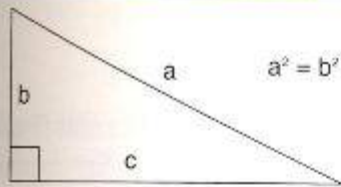
2. Démontrer aussi que si  $(x, y, z)$  est un triplet pythagoricien alors  $(kx, ky, kz)$  où  $k$  est un entier non nul, est encore un triplet pythagoricien.

(solution p 44 )

\* **nombre entier naturel** : nombre qui n'est divisible que par lui-même et par un.

\*\***Diophante** : mathématicien grec (II° - III° siècle), de l'école d'Alexandrie, qui mena des travaux d'Algèbre dont fermat s'inspira pour construire sa conjecture (voir p. 21 et 25 )

\*\*\* **Nombre rationnel** : nombre qui peut s'inscrire sous la forme d'une fraction  $a/b$  où  $a$  et  $b$  sont des entiers.



### Pythagorean triples

The theorem of Pythagoras states that in a right angled triangle the square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the other two sides.

Certain right angled triangles have all three sides as integers and these are of particular interest. The best known example is 3, 4, 5 but other well known ones are 5, 12, 13 and 6, 8, 10. However the triangle 6, 8, 10 is a multiple of 3, 4, 5 and is therefore the same shape and cannot be considered distinct.

This list contains all 158 distinct right angled triangles, not counting multiples, where all three sides are less than 1 000.

5	4	3	265	264	23	505	456	217	761	760	39
13	12	5	265	247	96	505	377	336	769	600	481
17	15	8	269	260	69	509	459	220	773	748	195
25	24	7	277	252	115	521	440	279	785	783	56
29	21	20	281	231	160	533	525	92	785	736	273
37	35	12	289	240	161	533	435	308	793	775	168
41	40	9	293	285	68	541	420	341	793	665	432
53	45	28	305	273	136	545	544	33	797	572	555
61	60	11	305	224	207	545	513	184	809	759	280
65	63	16	313	312	25	557	532	165	821	700	429
65	56	33	317	308	75	565	493	276	829	629	540
73	55	48	325	323	36	565	403	396	841	840	41
85	84	13	325	253	204	569	520	231	845	837	116
85	77	36	337	288	175	577	575	48	845	836	123
89	80	39	349	299	180	593	465	368	853	828	205
97	72	65	353	272	225	601	551	240	857	825	232
101	99	20	365	364	27	613	612	35	865	816	287
109	91	60	365	357	76	617	608	105	865	703	504
113	112	15	373	275	252	625	527	336	877	805	348
125	117	44	377	352	135	629	621	100	881	800	369
137	105	88	377	345	152	629	460	429	901	899	60
145	144	17	389	340	189	641	609	200	901	780	451
145	143	24	397	325	228	653	572	315	905	777	464
149	140	51	401	399	40	661	589	300	905	663	616
157	132	85	409	391	120	673	552	385	925	924	43
169	120	119	421	420	29	677	675	52	925	756	533
173	165	52	425	416	87	685	684	37	929	920	129
181	180	19	425	304	297	685	667	156	937	912	215
185	176	57	433	408	145	689	680	111	941	741	580
185	153	104	445	437	84	689	561	400	949	900	301
193	168	95	445	396	203	697	672	185	949	851	420
197	195	28	449	351	280	697	528	455	953	728	615
205	187	84	457	425	168	701	651	260	965	957	124
205	156	133	461	380	261	709	660	259	965	884	387
221	220	21	481	480	31	725	644	333	977	945	248
221	171	140	481	360	319	725	627	364	985	864	473
229	221	60	485	483	44	733	725	108	985	697	696
233	208	105	485	476	93	745	713	216	997	925	372
241	209	120	493	475	132	745	624	407			
257	255	32	493	468	155	757	595	468			

# PIERRE DE FERMAT, UN AMATEUR DE GÉNIE ?

Qui fut Pierre de Fermat ? un parlementaire érudit\* bon enfant ? un génie ? un amateur éclairé ?

Sa vie paraît se dérouler sans événement majeur, une vie paisible si on la compare à celle d'un Descartes par exemple. Bien qu'il ne se consacre aux recherches scientifiques qu'en dilettante\*\*, il est reconnu comme un génie mathématique par les plus grands savants de son temps.

## Un bourgeois fortuné

Pierre Fermat naît à Beaumont de Lomagne (Tarn et Garonne). Son père est consul de cette bastide\*\*\* tandis qu'un de ses oncles est capitoul\*\*\*\* à Toulouse, signes de notoriété dans cette région du Languedoc.

Il fait des études de droit à Orléans. Devenu bachelier en droit, il revient à Toulouse.

En 1630, il achète un office de conseiller du Roi au Parlement de cette ville et de commissaire des requêtes du Palais. Il accède peu à peu aux postes les plus élevés du Parlement: la Chambre criminelle et la Grande Chambre. A partir de 1648, il est aussi membre de la Chambre de l'Édit de Castres dont le rôle est de régler les différends entre protestants et catholiques.

En tant que parlementaire, il lui est permis d'ajouter la particule de noblesse de robe à son patronyme : c'est ainsi qu'il devient Pierre de Fermat.

Il passe sa vie entre Toulouse, Castres et sa propriété de Beaumont de Lomagne où il demeure quand il n'a pas de contrainte professionnelle. Il y gère un domaine d'environ 140 hectares de bonnes terres, de cultures, prés et vignes, ce qui lui assure des revenus confortables.

En 1631, Fermat épouse Louise de Long, fille d'un conseiller au Parlement de Toulouse, dont il aura cinq enfants. L'aîné, Samuel, érudit et poète, fut aussi conseiller au Parlement de Toulouse. A la mort de son père il se consacra à la sauvegarde des œuvres de ce dernier.

Les documents des archives (contrat de mariage, achat ou vente de terres, revenus divers) attestent de l'aisance financière de la famille. D'autre part Fermat ne manque pas d'ambition et intrigue à plusieurs reprises pour se faire nommer à la Chambre de l'Édit. Ses compétences de magistrat ne semblent pas exceptionnelles pour autant, ainsi que le sous-entend le rapport secret envoyé à Colbert en 1663 :

" *Fermat, homme de beaucoup d'érudition a commerce de tous costés avec les sçavants , mais assez intéressé, n'est pas bon rapporteur et est confus ; n'est pas des amis du Premier Président\*\*\*\*\*.*" (Voir bibliographie)

\* **Érudit** : personne qui a des connaissances approfondies dans un domaine

\*\* **Dilettante** : personne qui s'adonne à une activité en amateur, par plaisir, avec une certaine fantaisie

\*\*\* **Bastide** : ici, ne désigne pas la maison de campagne provençale (le mas) mais une ville fortifiée, au plan régulier, construite dans le Sud-Ouest de la France entre le XII<sup>e</sup> et le milieu du XIV<sup>e</sup> siècle

\*\*\*\* **Consul et capitoul** sont deux magistrats municipaux, le second terme est réservé à la magistrature de Toulouse.

\*\*\*\*\* *Un mathématicien de génie Pierre de Fermat* (1601 – 1665), catalogue de l'Exposition de 1957, lycée Pierre-de-Fermat, Toulouse (Haute-Garonne).

## Un bourgeois érudit

En revanche Fermat est un érudit qui s'intéresse à tout. Il possède une solide connaissance des langues anciennes, compose des vers en latin, en français, en espagnol. Il connaît parfaitement la philologie\* grecque et correspond avec le monde littéraire de son siècle (Guez de Balzac, Huet,...). Ces connaissances encyclopédiques ne sont pas rares à l'époque et Fermat est le reflet accompli de l'intellectuel de son temps. La référence à la science antique se double d'une volonté créatrice.

De son vivant, les projets d'édition de ses oeuvres n'aboutissent pas. Son fils, Samuel, en 1670, réussit à publier l'ouvrage de Diophante\*\*, *les Arithmétiques*, accompagné des notes de Pierre de Fermat (document p.25), qui renferment beaucoup des recherches du mathématicien sur la théorie des nombres et, entre autres, la fameuse conjecture dite de Fermat. Il publie aussi la correspondance de son père avec les plus grands savants de son temps et, en 1679, les *Varia Opera Mathematica* ( Divers travaux mathématiques)

Fermat intervient dans tous les domaines de la mathématique: calcul infinitésimal\*\*\*, géométrie analytique\*\*\*\*, algèbre, calcul des probabilités (voir le jeu des partis p.19) et théorie des nombres. Fermat correspond avec Descartes, Pascal et aussi avec Mersenne (voir p. 17), puis à la mort de celui-ci, avec Pierre de Carcavy . D'origine lyonnaise, ce dernier s'installe dans le Sud-Ouest comme magistrat au Parlement de Toulouse et devient ainsi ami et collègue de Pierre de Fermat. Parti à Paris comme membre du Grand Conseil, il est nommé, en 1663, responsable de la bibliothèque du roi sous la direction de Colbert .Il entretient une correspondance suivie avec Pierre de Fermat qui, en 1654, lui demande de publier ses traités de manière anonyme. Mais Carcavy y renonce (" *Les choses ne se trouvèrent pas disposées pour nous procurer satisfaction.* " lettre à Huygens de 1656). Plus tard, il hésita à confier à Samuel Fermat les papiers personnels que Fermat lui avait légués ; il préfère les céder à la bibliothèque du roi. (Donc ne sont accessibles que les travaux publiés par Samuel Fermat).

Pierre de Fermat, comme les mathématiciens de son temps, a soif de démontrer, contrairement aux Anciens.

Sa méthode de travail paraît peu académique, mais il a le souci de la démonstration et innove beaucoup dans le domaine de la " descente infinie " (voir encadré p. 19 ). Il est l'un des premiers à vouloir démontrer " il est impossible que " avec la conjecture du " Grand Théorème " ; ce qui est bien plus complexe que de démontrer " il est possible que ". Quelle audace !

En revanche, sans doute par manque de temps et aussi à cause de son esprit de synthèse, il néglige le détail des démonstrations au profit de l'élégance des résultats; ce que lui reproche vivement Descartes.

Son oeuvre mathématique est une des plus stimulantes de son siècle.

\* **Philologie** : étude des textes.

\*\* Cet ouvrage est en fait l'édition de Bachet de Méziriac qui, au début du XVII<sup>e</sup> siècle, proposait un texte grec, accompagné d'une traduction latine et d'un commentaire. C'est l'un de ces exemplaires que Pierre de Fermat annota.

\*\*\* **Calcul infinitésimal** : technique utilisant des quantités excessivement petites.

\*\*\*\* **Géométrie analytique** : géométrie utilisant les coordonnées dans un plan.



## Fermat jugé par ses contemporains

Ses collaborateurs du Parlement tantôt insistent sur sa conscience professionnelle, tantôt relèvent son peu d'intérêt pour une activité qui lui assure des honneurs et de la considération mais qui manifestement ne le passionne pas. Dans son milieu, il paraît semblable à ses confrères, soucieux de sa carrière capable d'intrigue pour briguer de nouvelles places. Son mariage est, de toute évidence, un mariage de raison, une façon pour lui de mieux s'insérer dans le milieu parlementaire.

Riche propriétaire terrien, il sait gérer ses domaines en bon père de famille, et veille aux rentrées de ressources, aux différents moyens dont il disposait pour arrondir son " pré carré ".

En revanche, il apparaît aux yeux de ses correspondants, parmi les plus connus du monde scientifique, comme un être exceptionnel, particulièrement doué et talentueux, un homme de référence .

Pascal le surnomme le " *premier homme du monde* ", le Père Marin Mersenne dit de lui que " *c'était un des plus beaux esprits de ce siècle et un génie ... universel* \* ". Quant à Descartes, qui avait eu maille à partir avec lui, il reconnaissait qu'il " *était un esprit vif, plein d'inventions et de hardiesse, mais se précipitant trop* ".

**Fermat contribua, plus que quiconque, au prodigieux développement de la pensée rationaliste et scientifique de son temps.**



*Cabinet à secret*

\* cité par le *Journal des sçavans*, 9 février 1665, au moment de la mort de Fermat).

# EFFERVESCENCE INTELLECTUELLE AU TEMPS DE PIERRE DE FERMAT

Au XVII<sup>e</sup> siècle dans la plupart des pays européens, les intellectuels, les savants, les philosophes, les écrivains entrent en relation sur les sujets les plus divers: mathématiques, physique, astronomie, étude des êtres vivants, littérature, théologie, philosophie. Les recherches intellectuelles restent certes liées aux débats politico-religieux. Mais le rationalisme progresse : la raison s'oppose à la foi ; c'est l'émancipation de la raison, entamée depuis la Renaissance, qui succède à la primauté accordée jusque là à la théologie.

## Diversité politique et religieuse, développement économique

L'Europe est en proie à des guerres fratricides :

- la guerre de Trente Ans en Allemagne (1618- 1638, guerre économique, religieuse, au cours de laquelle l'armement se perfectionne ;
- les guerres civiles (politico - religieuses) en Angleterre favorisent la conquête des libertés démocratiques (République de Cromwell, Déclaration des Droits de 1689) ;
- les suites des guerres de religion en France amènent au contraire l'exclusion du protestantisme pour mieux consolider la Monarchie absolue (Révocation de l'Édit de Nantes en 1685).

De nombreux protestants français émigrent vers les Pays Bas qui apparaissent comme une terre de liberté, la Suisse ou l'Allemagne.

## Modernité, baroque et classicisme

Les secteurs économiques bénéficient de progrès technologiques communs à tous les pays européens mais les pays de l'Europe occidentale s'enrichissent de manière spectaculaire grâce au commerce triangulaire avec les Antilles, avec les colonies espagnoles et britanniques d'Amérique, et grâce au commerce avec les Indes. Le mercantilisme est associé à la création des manufactures, début d'une production en plus grande quantité.



*La fontaine de Trévi à Rome*

De nouvelles formes artistiques éclosent, originaires d'Italie ; c'est l'essor du **Baroque** en architecture, peinture, arts décoratifs et musique ; un art de l'exubérance, de l'irrégulier, de l'emphase, du faste, de l'ostentatoire encouragé par les catholiques pour attirer les fidèles. Les thèmes traités dans l'art baroque sont extrêmes : la mort, la souffrance, la passion. La foi, elle-même, doit être vécue dans l'extase. Tout est fait pour éblouir les sens et frapper l'imagination. Luttant contre l'austérité de la Réforme, la Contre-Réforme catholique espère rendre sensible la présence du divin et montrer sa puissance.



En réaction à ce désordre exubérant, naît, en particulier en France, le **Classicisme**, art de la rigueur, de la rationalité, de la simplicité apparente, recherchant l'ordre et la mesure, le vraisemblable, la clarté, qui paraît intégrer les progrès de la raison dans les recherches intellectuelles

## De la pensée théologique à la pensée scientifique

La pensée rationaliste ne cesse de progresser depuis la Renaissance. Ce qui est recherché ce sont des vérités universelles, indépendantes des contingences quotidiennes, sociales, politiques ou religieuses; ceci grâce à la " lumière naturelle, la lumière de l'intelligence ".

L'Église catholique combat pied à pied la volonté d'indépendance et le renouvellement de la pensée, qu'il assimile à des blasphèmes\* et à une critique radicale du christianisme:

- en 1619, le philosophe Lucilio (?) Venini est brûlé vif à Toulouse pour athéisme;
- en 1623, le libertin Théophile de Viau, qui est condamné au bûcher à Paris, y échappe ; seule son effigie a été brûlée ;
- en 1633, Galilée est condamné par la Papauté pour avoir présenté ses théories sur le mouvement de la Terre et des astres;
- Dans son ouvrage " *Histoire comique des États et Empires de la Lune* ". Cyrano de Bergerac (1619-1655 ) expose clairement son athéisme même s'il prend la précaution de faire évoluer ses personnages dans un monde chimérique. Cet ouvrage, achevé en 1649, ne sera publié qu'en 1957, après sa mort survenue en 1655, afin qu'il réchappe aux foudres de l'Inquisition, suivi en 1662 par l'*Histoire comique des États et Empires du Soleil*, seconde partie du roman.

L'essor de la pensée rationaliste doit beaucoup à la Réforme protestante (Luther, Calvin) . Elle a engagé les fidèles à ne pas accepter les dogmes\*\* de l'Église catholique et à exercer leur esprit critique en relisant en toute liberté les textes bibliques.

Néanmoins, à Genève, certains savants, comme Michel Servet, ont été victimes aussi de l'intransigeance des calvinistes. Descartes a été poursuivi , aux Pays-Bas, par des théologiens protestants qui lui reprochaient sa démonstration purement rationnelle de l'existence de Dieu.

## Échanges et polémiques

Les progrès du rationalisme sont à l'origine de nombreuses découvertes scientifiques .Les chercheurs sont encore des esprits universels qui embrassent plusieurs domaines : Pascal, Descartes, Leibniz sont à la fois savants, physiciens, mathématiciens, et philosophes. Fermat est à la fois juriste, mathématicien et physicien

D'autre part les savants et philosophes échangent leurs connaissances, font le point sur leur recherche, lancent des controverses très animées (ex : Descartes et Fermat s'opposent vivement sur l'analyse de la réfraction\*\*\*), se lancent des défis :

Pascal pose la question de la cycloïde\*\*\*\* qui sera examinée par tous les amateurs de mathématiques. Le fameux Grand Théorème apparaîtra comme un de ces défis.

Nous avons des lettres de Fermat à Galilée, à Pascal, à Descartes et leurs réponses..

En France le Père **Marin Mersenne** joue un rôle privilégié dans ce domaine. Homme d'église, il entretient une correspondance très fournie avec Torricelli, Galilée, Pascal, Descartes, Fermat, Roberval et Beckmann. Partisan d'un travail scientifique collectif, il contribue à l'essor de la recherche au XVIIe siècle et fait lui même des découvertes en physique, notamment en acoustique.

L'un des premiers savants de laboratoire à posséder un cabinet de physique, il participa à l'institution de la physique quantitative\*\*\*\*. Marin Mersenne, correspondant attiré de Fermat, fut reçu par lui-même dans sa maison de Beaumont de Lomagne en 1646.

\* **Blasphème** : parole outrageante à l'égard de Dieu ou de tout ce qui est considéré comme sacré et respectable.

\*\* **Dogme** : point fondamental d'une doctrine que l'on doit accepter.

\*\*\* **Réfraction** : déviation d'un rayon lumineux (ou d'une onde électromagnétique) qui franchit la surface de séparation de deux milieux dans lesquels les vitesses de propagation sont différentes (exemple : l'air et l'eau)

\*\*\*\* **Cycloïde** : courbe décrite par un point sur un cercle qui roule sur une droite (voir la BT2 n°5 -ou la BTn-, Galilée)

\*\*\*\*\* **physique quantitative** : la physique quantitative s'attache à rechercher les relations quantitatives entre les phénomènes.

## Les mathématiques au coeur de la pensée rationaliste

" *Le livre de la nature est écrit en langage mathématique* "

Par cette maxime, Galilée, mathématicien, physicien et astronome, inaugure la science quantitative. Toute science repose sur du mesurable, du quantifiable, de l'expérimentable. La recherche de lois générales, de règles permet de découvrir l'ordre de la nature.



*Jardin potager à Villandry. Il comporte 9 carrés de taille identiques, comportant des formes géométriques toutes différentes.*

Les mathématiques deviennent le langage obligé de la rationalité. Elles sont l'instrument indispensable des démonstrations de physique.

Les progrès de la mathématique sont rapides après une longue période d'ignorance en Occident (NB : les savants de culture musulmane, eux, avaient au cours de notre Moyen Âge fait faire un bond spectaculaire à cette discipline par le développement de l'algèbre).

Descartes, Roberval, Fermat, puis Leibniz, jettent les bases du calcul infinitésimal. Fermat et Descartes font progresser la géométrie analytique

Les mathématiques sont l'instrument indispensable des démonstrations de physique. Descartes recherche un langage unique qui serait semblable au langage mathématique pour expliquer tout de manière rationnelle. Pour lui, la vérité ne peut être découverte que par les mathématiques. Les démonstrations de toute sorte se font *more geometrico* (y compris pour prouver l'existence de Dieu).

Il oppose la logique qui n'est que formelle aux mathématiques qui sont démonstratives. C'est la géométrie qui permet d'atteindre la certitude (voir *Les Règles pour la Direction des Esprits*, le *Discours de la Méthode*)

Pascal sait combiner son savoir mathématique et ses expériences de physique sur le vide.

Contrairement à ce qu'on pourrait penser, les savants de l'époque, tels Francis Bacon, Descartes, affirment que la science doit apporter des bienfaits à l'humanité. Descartes rêve d'une physique " *qui nous rendrait maîtres et possesseurs de la nature.*" Descartes invente une machine pour tailler des verres. Roberval, mathématicien, professeur au Collège Royal, est l'inventeur de la fameuse balance qui porte son nom. Il participe à tous les débats scientifiques ; il défend Fermat contre Descartes à propos de la méthode du minima et du maxima, dite méthode de Fermat. Pascal crée une machine à calculer, la pascaline, organise de manière rationnelle un système de transport urbain grâce aux mathématiques. (Après sa " conversion ", en revanche, Pascal juge " *futile* " la recherche scientifique ).

## La recherche mathématique, un divertissement ?

Pour Pascal, les mathématiques sont un jeu de l'esprit, un divertissement qui éloigne des préoccupations métaphysiques et spirituelles pour lui prioritaires. Il oppose l'esprit de géométrie et l'esprit de finesse ; il est partagé entre sa raison et sa foi pour laquelle il opte définitivement.

Le jeu inspire certains raisonnements mathématiques : les jeux de hasard (jeu de dés, jeu d'argent, jeu de roulette, trictrac ancêtre du back gamon) amènent Pascal et Fermat au calcul des probabilités.

Ainsi la **raison** peut avoir prise sur le **hasard**, l'**aléatoire**, qui paraît son antithèse.

(NB : le jeu amène d'autre part Pascal au pari métaphysique sur l'existence de Dieu ; Pascal est pris à son propre piège de l'amour du jeu et de l'apparent refus de s'y laisser prendre)

Pour Pierre de Fermat, les mathématiques apparaissent effectivement comme un jeu, un divertissement, qui l'emporte bien souvent sur son activité professionnelle ; certains laissent sous-entendre que Fermat est un piètre magistrat, alors que ses talents de mathématicien et de physicien sont reconnus dans toute l'Europe, ainsi que le prouve sa correspondance.

Mais ces positions scientifiques remettent en cause les positions philosophiques et y sont étroitement associées.

- Les mathématiques sont -elles imposées à Dieu ou Dieu les a-t-il créées ?
- Si le hasard existe, malgré la maîtrise relative que l'on peut en avoir par le calcul des probabilités, ce hasard peut-il échapper à l'omniscience de Dieu ?
- Dieu joue-t-il aux dés ou tout est-il déjà prédéterminé ?
- Le hasard a-t-il ses règles ?
- Si le monde est un jeu, l'homme peut-il gagner ? Dieu peut-il tricher ?

Ces prétentions, ces remises en question sont systématiquement condamnées par l'Église.

## FERMAT ET PASCAL JOUENT AU JEU DES PARTIS : NAISSANCE DU CALCUL DES PROBABILITÉS

A l'origine, un problème fut posé à PASCAL par le Chavalier de MERE, écrivain et joueur assidu. Un jeu de hasard étant interrompu avant la victoire de l'un des joueurs, comment partager équitablement la mise initiale ?

Ce problème est connu sous le nom de **problème des partis**, le mot "parti" étant le participe passé substantivé de "partir", qui signifie "partagé". Faire le parti, c'est donc effectuer le partage.

Au XVIème siècle déjà, certains savants s'étaient penchés sur le problème (Luca PACIOLI, TARTAGLIA...) sans y apporter de solutions satisfaisantes car en fait ils ne tenaient compte que de ce qui était déjà gagné. L'originalité de PASCAL et FERMAT fut de prendre en compte ce qui restait à gagner. Dans leur correspondance de 1654, ils proposèrent deux méthodes d'esprit très différentes pour arriver à la même répartition. Ainsi furent posés les premiers jalons du *calcul des probabilités*.

### LA MÉTHODE DE PASCAL.

Dans sa lettre du 29 juillet 1654, PASCAL expose sa méthode à FERMAT. Il suppose que le jeu s'arrête sur le score de 2 points pour le joueur A et 1 point pour le joueur B ; or, ne peut être déclaré gagnant qu'un joueur ayant 3 points. La mise initiale a été de 32 pistoles pour chaque joueur.

Le raisonnement de PASCAL porte sur ce qui pourrait se passer si le jeu se poursuivait.

La partie suivante a deux issues possibles :

- c'est le joueur A qui gagne : il empoche donc la mise totale, soit 64 pistoles.
- c'est le joueur B qui gagne : les deux joueurs se trouvent alors à égalité et ils doivent se partager la mise à parts égales.

Or ils ont une chance sur deux de gagner cette hypothétique quatrième partie. Donc le joueur A est sûr de gagner au moins 32 pistoles (quelle que soit l'issue de la quatrième partie) et pour les 32 pistoles restant il a une chance sur deux de les gagner.

Donc, il doit prendre :  $32 + \frac{32}{2} = 48$  pistoles et le joueur B :  $\frac{32}{2} = 16$  pistoles.

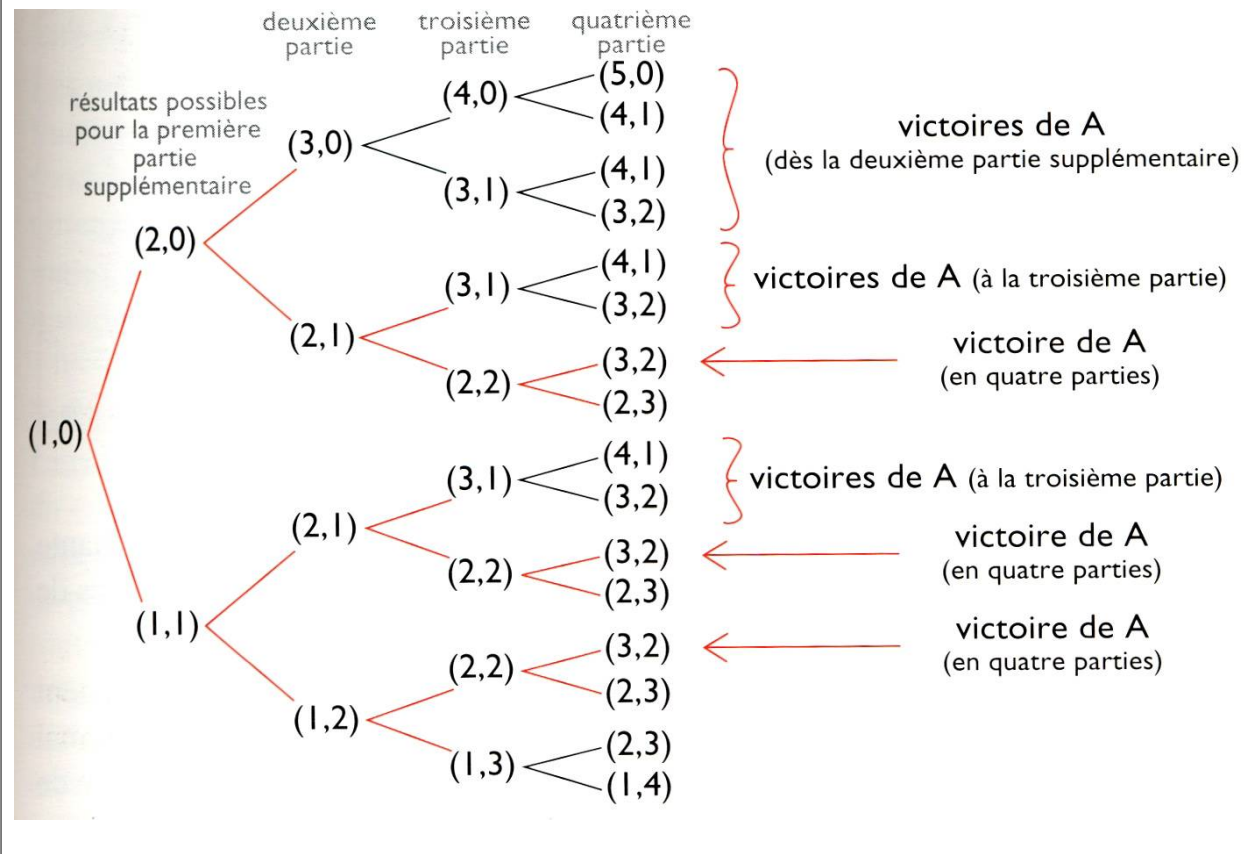
### LA MÉTHODE DE FERMAT :

Elle est exposée par FERMAT à PASCAL, ainsi que le rappelle PASCAL dans sa lettre du 24 août 1654. FERMAT se place dans la situation suivante : le jeu est arrêté avec un point pour A et 0 point pour B, l'objectif étant toujours de gagner 3 parties.

Le raisonnement de FERMAT est le suivant : le jeu se terminera en 4 parties au plus (en effet, en 3 parties, A peut gagner 1 fois et B 2 fois, et il faudra donc une quatrième partie). On a colorié sur l'arbre ci-dessous les chemins où les 4 parties sont nécessaires pour terminer le jeu. Pour les autres, le jeu se termine avant. Mais pourquoi avoir représenté complètement les autres possibilités alors qu'en fait le jeu s'arrêterait avant ? L'explication, qui n'est pas donnée dans la lettre (mais Fermat n'a pas l'habitude de détailler ses solutions !) est tout simplement ce que nous appelons dans le langage moderne des probabilités, la recherche de l'équiprobabilité. C'est-à-dire que les chemins de l'arbre ont la même probabilité de se produire (ce qui ne serait pas le cas si on enlevait les chemins non coloriés).

Donc, comme 11 chemins (sur les 16) donnent la victoire à A et 5 à B, la répartition doit se faire dans les rapports respectifs :  $\frac{11}{16}$  et  $\frac{5}{16}$ .

Il est facile de vérifier qu'en partant du même score initial et de mêmes mises de départ, les méthodes de PASCAL et FERMAT aboutissent à la même répartition.





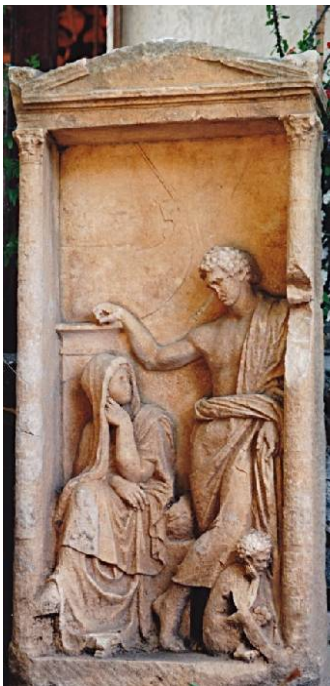
# AUX SOURCES DES MATHÉMATIQUES

C'est en lisant et annotant les *Arithmétiques* de Diophante que Fermat se penche attentivement sur plusieurs types de problèmes de théorie des nombres .

**Diophante**, mathématicien d' Alexandrie (probablement entre IIe et le IIIe siècle après J.C.?)\* dont l'existence est très mal connue, a repris dans ses ouvrages le travail élaboré depuis le VIe siècle avant J.C dans le monde grec, à l'origine de la mathématique. **Il reprend en particulier les travaux sur l'arithmétique, les nombres réalisés par Pythagore et Euclide** (qui a consacré trois de ses livres à ce qui a pu servir de bases à la théorie des nombres\*\*).

Ces hommes, à la fois philosophes et savants, jettent les fondements de la géométrie, de l'arithmétique ; ils s'intéressent aussi à l'astronomie, à la physique. De fait ils contribuent à la naissance des sciences en tant qu'effort de réflexion et d'analyse .

Dans les cités policées, dont l'apparition est favorisée par la révolution agraire et artisanale dès le IXe millénaire avant notre ère, les organisateurs, les dirigeants, doivent compter les redevances dues aux autorités, roi, prince ; les échanges portent sur des produits dont on estime la parité ; l'architecture d'autre part oblige les constructeurs à rationaliser l'espace bâti. C'est à partir de ces données empiriques que sont conceptualisés des objets abstraits.



Les mathématiciens grecs, Pythagore, puis Euclide, en spéculant sur ces objets idéaux, fondent ainsi les mathématiques, volontairement isolées de leurs références pragmatiques. Platon, dans " *La République* " n'aime pas que l'on parle de géométrie, mesure de la terre, un terme qui sent trop l'arpenteur.

La culture grecque est une culture de l'*agon*, du conflit ; les questions soulevées amènent des réponses contrastées qui induisent un raisonnement par alternative. Objets abstraits, sujets à spéculation, les propositions mathématiques ne sont plus de simples énoncés traduisant des faits empiriques, mais nécessitent désormais une démonstration qui conduit des prémisses à une conclusion nécessaire.

\* La vie de Diophante est très mal connue. Il aurait vécu après la seconde moitié du II<sup>e</sup> siècle av.J.-C. Et avant la seconde moitié du IV<sup>e</sup> siècle ap. J.-C. Pour préciser l'époque, plusieurs hypothèses ont été émises, mais retenons la plus vraisemblable qui le situe entre le II<sup>e</sup> et le III<sup>e</sup> siècle ap.J.-C.

\*\* Mentionnons les livres VII, VIII et IX d'Euclide ou de l'école euclidienne (Alexandrie, vers le IV<sup>e</sup> et le II<sup>e</sup> siècle av.J.-C.) qui forment le traité le plus ancien de la théorie des nombres. On y trouve la notion du plus grand commun diviseur, de nombre premier, de nombre parfait.

# PYTHAGORE

Philosophe et mathématicien grec qui aurait vécu au VI<sup>e</sup> siècle avant JC

Sa vie est mal connue. Il serait né à Samos puis aurait vécu à Croton en Italie (grande Grèce) . Il fonda des communautés philosophiques dont les adeptes acceptaient de mener une vie ascétique. L'enseignement avait un caractère initiatique et serait d'inspiration orphique\* par certaines croyances, comme la métempsycose\*\*.

Il ne reste aucun écrit de Pythagore ; les découvertes qu'on lui attribue sont dues à l'ensemble de l'école pythagoricienne. Les théorèmes établis furent mis en ordre par Euclide au III<sup>e</sup> siècle avant J.C..

Les principales démonstrations sont les suivantes :

- Table de multiplication ou table de Pythagore
- Théorème du carré de l'hypoténuse ou théorème de Pythagore.

Un de ses disciples Philolaos établit une théorie astronomique.

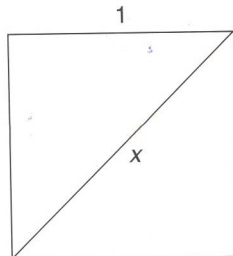
Toutes ces découvertes mathématiques sont sans doute à l'origine de la philosophie pythagoricienne qui voit dans les nombres les principes de toute chose les lois de l'univers.

" Toutes les choses qu'il nous est donné de connaître possèdent un nombre, et rien ne peut être conçu, ni connu, sans le nombre." (Philolaos)

## EXERCICE 6

**Le problème de la "nature " du nombre qui mesure la diagonale du carré de côté 1**

*Prenons l'exemple d'un carré de côté 1 et notons  $x$  la mesure de la diagonale.*



1. *Montrer en utilisant Pythagore que  $x^2 = 2$ .*

2. *Supposons que ce nombre  $x$  soit une fraction c'est à dire ce que l'on appelle un nombre rationnel (ce peut être un entier comme  $4 = \frac{4}{1}$  un nombre décimal comme  $0,5 = \frac{1}{2}$  , ou bien encore un nombre non décimal comme  $\frac{2}{3}$  ). Alors il existe deux entiers  $a$  et  $b$  tels que  $x = \frac{a}{b}$  avec  $\frac{a}{b}$  fraction irréductible (simplifiée au maximum)*



a) Montrer alors que  $a^2 = 2 b^2$

b) Compléter le tableau suivant :

chiffres de unités possibles pour $a$ et $b$	
chiffres des unités possibles pour $a^2$ et $b^2$	
chiffres des unités possibles pour $2 b^2$	

Conclure à partir de ce tableau qu'il y a une contradiction avec l'hypothèse que la fraction  $\frac{a}{b}$  est irréductible et donc que  $x$  ne peut pas s'écrire sous forme d'une fraction.

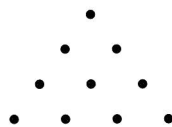
Les Grecs appelaient un tel nombre un incommensurable. Les mathématiciens l'appellent maintenant un nombre irrationnel (le nombre  $\pi$  est aussi un irrationnel) et le note  $\sqrt{2}$  (le symbole  $\sqrt{\quad}$  a été introduit au XVI ème siècle).

(solution p. 44)

## LA MYSTIQUE DES NOMBRES DANS L'ÉCOLE DE PYTHAGORE

Pour le Pythagoricien mystique, la Société des Nombres se compose :

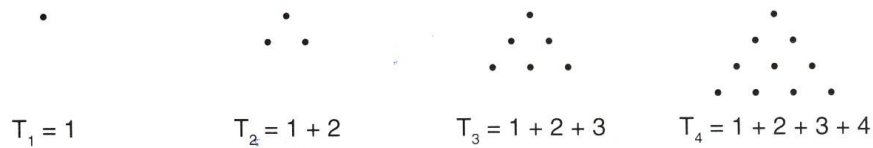
- de la monade, le nombre origine du principe d'identité ;
- de la dyade, nombre deux, premier nombre pair et féminin, origine du principe de non contradiction, de l'opposition entre le moi et le non moi ;
- de la triade, premier nombre impair et masculin, triangle appelé " tétraklys " qui fut le symbole ésotérique des pythagoriciens.



L'école pythagoricienne jette les fondements de l'arithmétique grecque qui n'étudie que les nombres entiers. Cette arithmétique est géométrique . Elle classe, en effet, les nombres selon la forme des assemblages de points : nombres triangulaires, carrés, pentagonaux,...

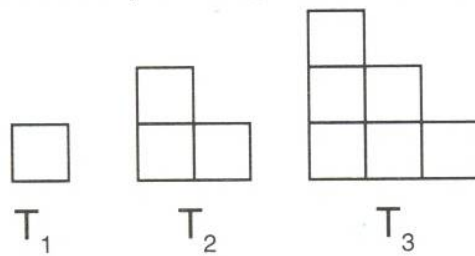
EXERCICE 7

1. Voici les représentations des 4 premiers " nombres triangles "

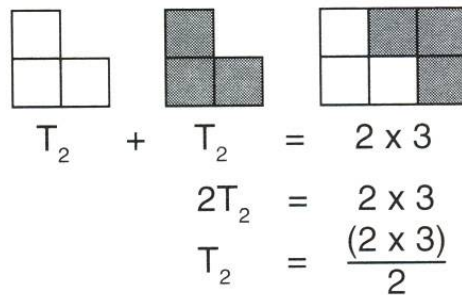


Calculer  $T_1, T_2, T_3, T_4$ . Dessiner et calculer les six nombres triangles suivants.

2. On peut aussi représenter ces nombres par des " escaliers " :



3. En s'inspirant des dessins et calculs ci-dessous, calculer  $T_3, T_4$  et  $T_8$ .



Trouver ainsi une formule permettant de calculer rapidement la somme des 23 premiers nombres entiers naturels non nuls, c'est à dire de calculer  $T_{23}$ . Plus généralement, trouver une formule donnant la somme des  $n$  premiers nombres entiers naturels non nuls (c'est à dire une formule donnant  $T_n$  en fonction de  $n$ ).

4. Application (extraite du Rallye Mathématique d'Aquitaine 1992)

Cent coffres renferment la même quantité de pièces.

On prend dans le premier un certain nombre de pièces, dans le second 2 fois plus, dans le troisième 3 fois plus etc....; dans le centième coffre cent fois plus ; il ne reste alors qu'une seule pièce dans ce coffre.

Sachant qu'il reste en tout 14950 pièces dans les cent coffres, combien y avait-il initialement de pièces dans chaque coffre ?

(solution p. 45)

# DIOPHANTE D'ALEXANDRIE

De l'oeuvre mathématique attribuée à Diophante nous sont parvenus six livres d'un ouvrage sur les *Problèmes arithmétiques*, un chapitre d'un livre sur les *Nombres polygones* dans leur version grecque et d'autres livres conservés grâce aux mathématiciens arabes.

Les "*Arithmétiques*" sont un ouvrage par lequel Diophante édifie une théorie mathématique dont les éléments constitutifs seraient les nombres, considérés comme pluralité d'unités et les parties fractionnaires comme fractions de grandeurs.

Il étudie les problèmes déterminés du premier et second degré à une ou plusieurs inconnues ; ceci conduit par élimination à une équation quadratique : pour les équations indéterminées, ce sont des équations à plusieurs inconnues admettant un grand nombre de solutions. Diophante se restreint aux solutions rationnelles-nombres entiers, fractions ou plus tard nombres décimaux ; c'est ce qu'on appelle l'analyse diophantienne.

Les problèmes diophantiens ont été le support du déploiement des techniques algébriques chez les mathématiciens musulmans, puis chez les mathématiciens européens à partir du XVIIe siècle .

## TRADUCTION DU TEXTE DE DIOPHANTE

" Il est proposé de diviser un carré en deux carrés. Il est ordonné que 16 soit divisé en deux carrés. Que soit posé en premier un carré  $1 Q$  . Il convient donc que  $16 - 1 Q$  soit égal à un carré. J'imagine le carré à partir d'un nombre quelconque diminué d'autant d'unités qu'il y a dans le côté de 16. Par exemple  $2 N - 4$ . Donc à partir de  $2 N - 4$ , le carré en question sera  $4 Q + 16 - 16 N$ . Cela sera égal à  $16 - 1 Q$ . Que le reste commun soit ajouté de part et d'autre et que les choses semblables soient retirées des choses semblables.  $5 Q$  est égal donc à  $16 N$  et  $1 N$  à  $\frac{16}{5}$

L'autre carré sera donc  $\frac{256}{25}$  et l'autre  $\frac{144}{25}$  , et la somme des deux est  $\frac{400}{25}$  , soit 16, et l'un et l'autre sont des carrés."

Si l'on veut traduire ce texte dans un langage moderne, voici ce que l'on peut dire.

Diophante veut écrire 16 comme somme des carrés de deux nombres (dans le texte ci-dessus,  $x = 1 N$  et  $x^2 = 1 Q$ )

$$\text{Donc } 16 - x^2 = y^2$$

Diophante cherche alors pour  $y$  une solution qui serait de la forme  $2x - 4$

$$\text{On a donc l'équation : } 16 - x^2 = (2x - 4)^2$$

$$\text{d'où : } 16 - x^2 = 4x^2 - 16x + 16$$

$$\text{soit } 5x^2 = 16x$$

$$\text{d'où } x = \frac{16}{5}$$

$$\text{et donc } y = \frac{12}{5}$$

**Remarques :**

Diophante se contente de donner une solution et non pas toutes les solutions.

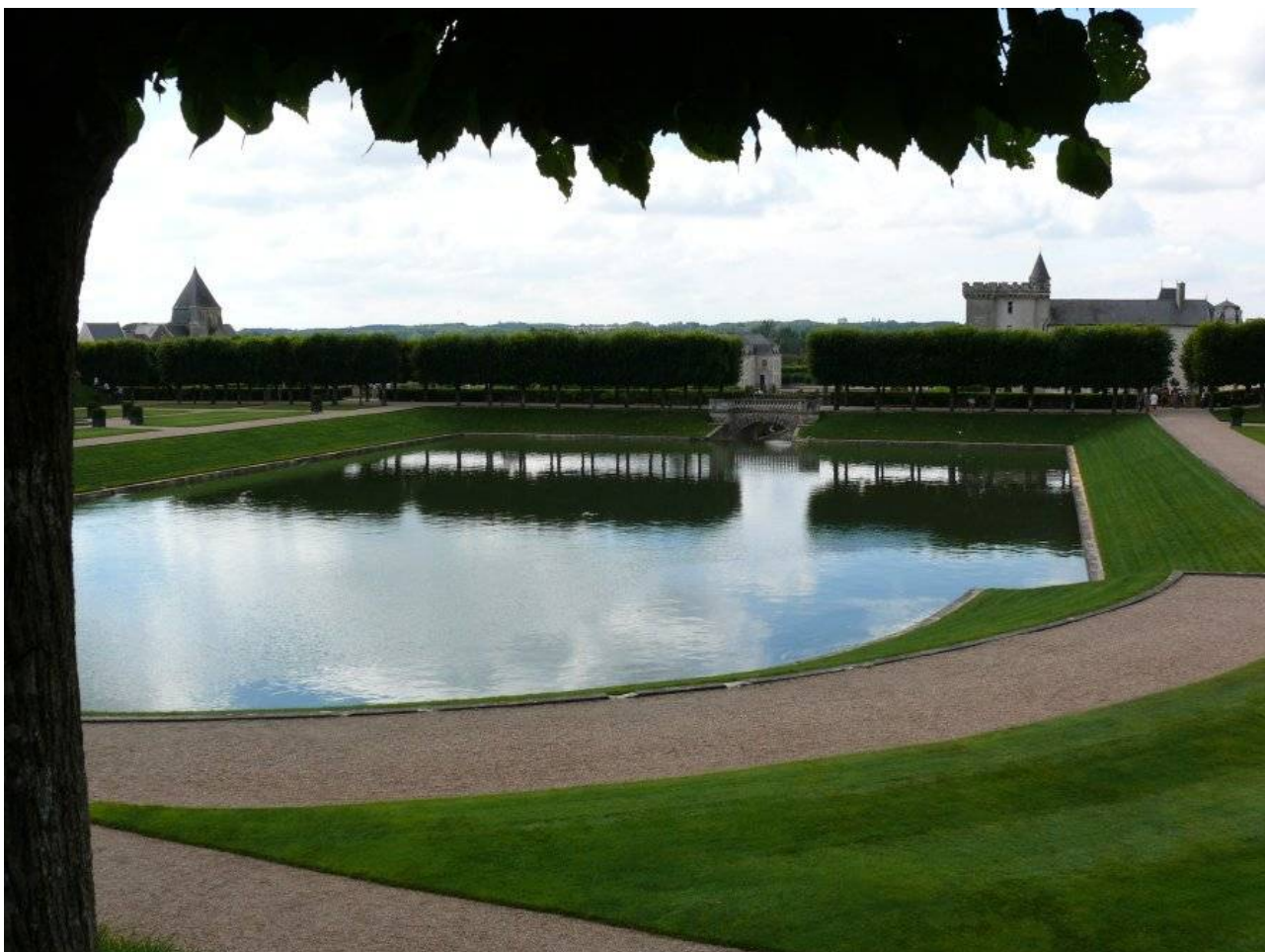
Zéro est aussi solution de l'équation  $5x^2 = 16x$ , mais le zéro est inconnu de Diophante et de plus cette solution est inintéressante pour le problème posé.

**TRADUCTION DE LA MARGE DE FERMAT**

" D'autre part, un cube n'est jamais la somme de deux cubes, une puissance quatrième n'est jamais la somme de deux puissances quatrièmes et plus généralement aucune puissance supérieure à 2 n'est la somme de deux puissances analogues.

J'ai trouvé une merveilleuse démonstration de cette proposition, mais je ne peux l'écrire dans cette marge, car elle est trop longue."

*Château de Villandry  
jardin d'eau*



# UNE DEVINETTE DE 350 ANS ENFIN RÉSOLUE

Retrouvons Pierre de FERMAT étudiant son exemplaire des " *Arithmétiques* " de DIOPHANTE et s'arrêtant sur le problème des triplets pythagoriciens que nous venons d'évoquer.

" *Et si à la place des carrés il y avait des cubes ?* " a-t-il dû se dire. " *essayons un peu pour voir....Ainsi  $2^3 + 3^3$  cela fait 35 mais 35 n'est pas le cube d'un entier... Essayons encore....  $9^3 + 10^3$  cela fait 1729...pas de chance car  $12^3 = 1728$ ... on n'est pas tombé loin !* " Et ainsi, de tentatives infructueuses en tentatives infructueuses, l'audacieux en arrive à la conclusion qu'il n'hésite pas à écrire dans la marge de son exemplaire :

**" *Il est impossible de partager soit un cube en deux cubes, soit un bicarré en deux bicarrés soit en général une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré.* "**

Autrement dit, en langage moderne :

**L'équation  $x^n + y^n = z^n$  n'a pas de solution dans l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls si  $n$  est un entier supérieur ou égal à 3.**

Audacieux, la suite de l'histoire allait le prouver mais malicieux sûrement car il ajoutait, toujours dans la marge :

**" *J'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir.* "**

Et voilà lancé un des scénarios les plus palpitants que la communauté mathématique va mettre plus de trois siècles et demi à terminer. Le film pourrait s'appeler " La conjecture\* de Fermat ". Abusivement on a parlé de théorème de Fermat (parfois qualifié de " dernier " ou de " grand ") mais en fait tant qu'il n'y avait pas de démonstration, l'appellation théorème est incorrecte.

## Premier épisode : la démonstration de Fermat pour le cas $n = 4$

FERMAT donnera une démonstration pour l'exposant 4. Écoutons-le se confiant dans un interview exclusive .... et imaginaire au mathématicien contemporain IAN STEWART\* :

"Je supposais, pour des raisons tactiques, qu'il y avait des solutions à une équation un peu différente :  $x^4 + y^4 = z^2$  . Je remarquai qu'une solution donnerait un triangle pythagorien avec les deux côtés de l'angle droit qui seraient eux-mêmes des carrés. J'appliquai les formules classiques des triangles pythagoriciens et, après quelques simples déductions, trouvai qu'il y avait alors une autre solution de  $x^4 + y^4 = z^2$  , avec des valeurs plus petites non nulles pour  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Continuant de la sorte, j'arrivai à l'inévitable conclusion que l'existence d'une solution quelconque impliquerait celle d'une autre avec des entiers non nuls les plus petits possibles, c'est à dire  $x = 1$  et  $y = 1$ , ce qui n'est pas une solution, car 2 n'est pas un carré. Il n'y a donc pas de solution à  $x^4 + y^4 = z^2$  ,et, en particulier, pas à  $x^4 + y^4 = z^4$  , car toute puissance quatrième de  $z$  est aussi un carré de  $z^2$  ."

Au passage remarquons que FERMAT utilise deux types de raisonnements connus des mathématiciens: le raisonnement par l'absurde\*\* et la méthode de descente infinie\*\* dont il écrivait " ce genre de démonstration conduira à des progrès merveilleux en arithmétique."

Nous entendons votre critique : un peu léger Monsieur FERMAT, vous affirmez avoir découvert une démonstration pour tout exposant entier strictement plus grand que 2, et votre preuve porte sur seulement la seule et unique valeur 4 !

Nous comprenons votre réaction, mais vous êtes injuste envers ce pauvre FERMAT car, en fait en le démontrant pour  $n = 4$ , il le démontre pour tous les exposants multiples de 4. Un autre raisonnement par l'absurde le prouve facilement. En effet si on suppose qu'il existe un multiple de 4 noté  $4k$  pour lequel l'équation  $x^{4k} + y^{4k} = z^{4k}$  a une solution  $(X, Y, Z)$  alors on a :  $X^{4k} + Y^{4k} = Z^{4k}$  d'où, en utilisant les propriétés des puissances :  $(X^k)^4 + (Y^k)^4 = (Z^k)^4$  et donc les entiers  $X^k$ ,  $Y^k$ ,  $Z^k$  seraient solutions du cas  $n = 4$ . Or nous avons vu plus haut qu'il n'y a pas de solution pour cette valeur.

Et sachant que tout entier strictement plus grand que 2 est soit multiple de 4, soit multiple d'un nombre premier\*\*\* impair (c'est à dire en fait différent de 2 !), il reste donc à démontrer la conjecture uniquement lorsque l'exposant est un entier premier impair. On y voit plus clair !

\* Voyage au pays de Fermat, Yan Stewart, Pour la Science n°195, janvier 1994

\*\* Voir encadrés ci-dessous

\*\*\* Nombre premier : nombre qui a exactement deux diviseurs : un et lui-même

### Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à prendre comme hypothèse la proposition contraire de celle qu'on veut démontrer et en déduire une contradiction. Cela prouve que l'hypothèse faite est fautive, donc que son contraire est vrai.

Il y a un exemple de démonstration par l'absurde dans l'exercice 6, page 21. On veut démontrer que  $\sqrt{2}$  n'est pas un rationnel. On fait donc l'hypothèse que  $\sqrt{2}$  est rationnel et qu'il s'écrit alors sous la forme d'une fraction irréductible. La contradiction vient du fait que rapidement on démontre que la fraction n'est pas irréductible.

### Méthode de descente infinie

Fermat en revendique la paternité. Il s'agit en fait d'un raisonnement par l'absurde.

Étant donné un problème portant sur une propriété de nombres entiers naturels :

- première étape, on suppose que ce problème a une solution en nombres entiers naturels ;
- seconde étape, on démontre qu'il existe alors une autre solution formée d'entiers naturels strictement plus petits, et la contradiction vient du fait qu'il ne peut exister de suite infinie strictement décroissante d'entiers naturels.

## Deuxième épisode : la démarche pas à pas

A la suite de FERMAT, les mathématiciens essayèrent de démontrer la conjecture exposant par exposant. Ainsi le Suisse Leonhard EULER (1707-1783) prouva l'absence de solution entière dans le cas  $n = 3$ , Pierre LEJEUNE-DIRICHLET dans le cas  $n = 5$  en 1828. En 1839, Gabriel LAME proposa une démonstration pour  $n = 7$  mais il y avait quelques erreurs qui furent corrigées par Joseph LIOUVILLE en 1840. En 1847, ce même LAME affirma avoir trouvé la démonstration complète, mais l'Allemand KUMMER (1810-1893) y découvrit une erreur... intéressante, car elle allait ouvrir la voie des avancées à venir. En utilisant sa nouvelle théorie des nombres idéaux, KUMMER démontra la conjecture pour les exposants premiers inférieurs à 100 exceptés 37, 59 et 67.

Au même moment, l'Académie des Sciences de Paris décidait d'offrir un prix pour récompenser celui qui trouverait une démonstration correcte. Il faut reconnaître en effet que les candidats, professionnels ou amateurs étaient légions. En 1854 donc une médaille fut attribuée à KUMMER et 300000 francs-or attendaient celui qui donnerait la démonstration complète. L'origine d'un autre prix mérite d'être racontée ici. Au début de ce siècle, Paul WOLFSKEHL, industriel allemand, mais aussi mathématicien amateur, fut éconduit par la femme qu'il aimait. Profondément affecté, il décida de mettre fin à ses jours. Peu avant l'heure fatidique, feuilletant dans sa bibliothèque les dernières publications concernant la conjecture de FERMAT, il crut entrevoir la solution et se mit au travail avec ardeur. Le temps passa... et l'heure fixée pour le suicide aussi. Reconnaisant envers le problème qui lui avait sauvé la vie, il offrit dans son testament 100 000 DM à qui résoudrait l'énigme.

## Troisième épisode : des tentatives plus globales

Mais évidemment une approche des impossibilités au cas par cas ne peut pas résoudre le problème posé car il reste toujours une infinité d'exposants à vérifier.

Aussi l'histoire de cette démonstration fut entrecoupée d'autres résultats pertinents portant sur des familles potentiellement infinies d'exposants premiers. Dans cette saga nous retiendrons le nom d'une femme, Sophie GERMAIN (1776-1831). Elle dut se heurter à de nombreux obstacles (autres que mathématiques !) et à des préjugés. D'ailleurs " *craignant le ridicule attaché au nom de femme savante* " elle signa parfois ses oeuvres d'un pseudonyme.

Pour résumé nous dirons que des progrès dans la théorie à partir des travaux de KUMMER et la puissance accrue des ordinateurs permettaient, il y a une dizaine d'années de d'étudier le cas de quelques centaines de milliers d'exposants premiers.

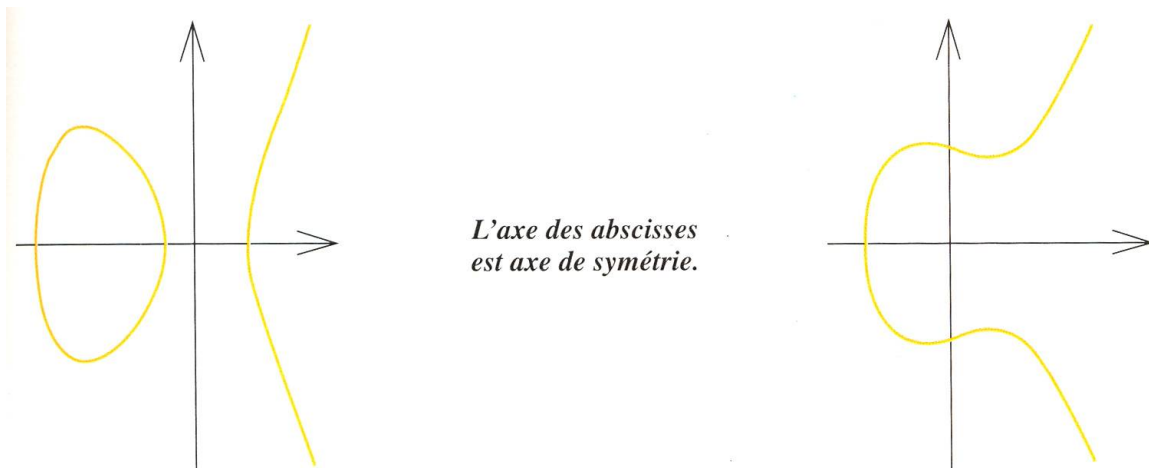


# Quatrième et dernier épisode : le feu d'artifice final

Avant de parler des héros du dernier épisode, il faut dire quelques mots des "armes" utilisées pour "terrasser le dragon". Nous étudierons... un peu les courbes elliptiques et nous évoquerons rapidement les formes (ou fonctions) modulaires.

## Les courbes elliptiques

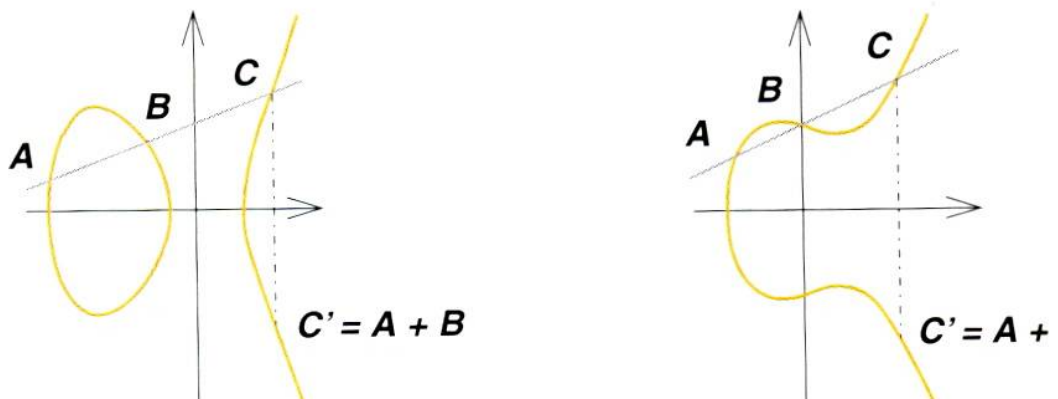
Ce sont des courbes planes qui interviennent dans de nombreux domaines mathématiques comme par exemple le calcul de la longueur d'un arc d'ellipse -d'où leur nom- ou la cryptographie (la science du codage). La représentation graphique d'une courbe elliptique peut avoir deux formes



L'intérêt de ces courbes est que leur forme permet de définir l'addition... entre deux points ! Voyons un peu comment :

Soient A et B deux points de la courbe . En général la droite (AB) recoupe la courbe en un 3ième point noté C.

Soit C' le symétrique de C par rapport à l'axe des abscisses, C' est donc un point de la courbe. On pose par définition  $C' = A + B$ .

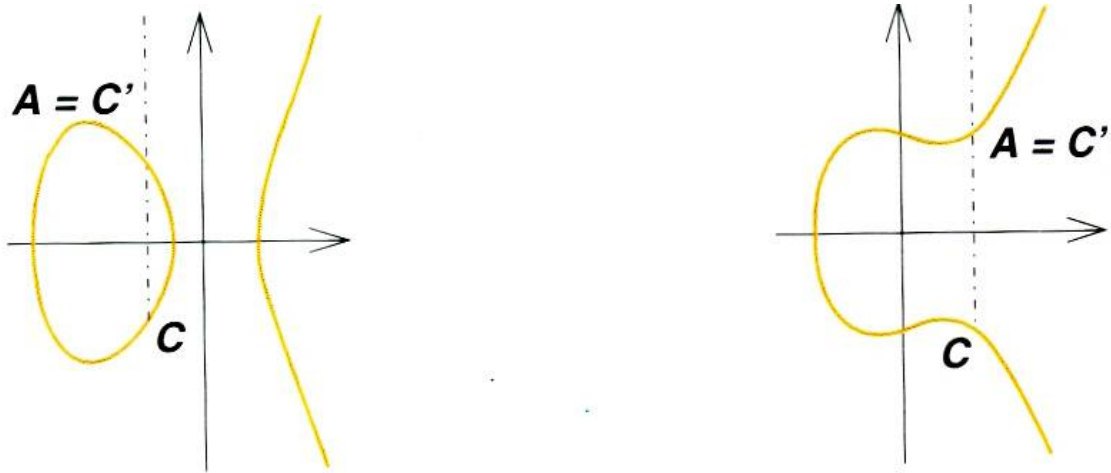


Pour éviter les exceptions (en particulier quand la droite (AB) est verticale) on est amené à compléter la courbe par un point à l'infini, le " point d'intersection " de toutes les verticales : on l'appelle le point de fuite.

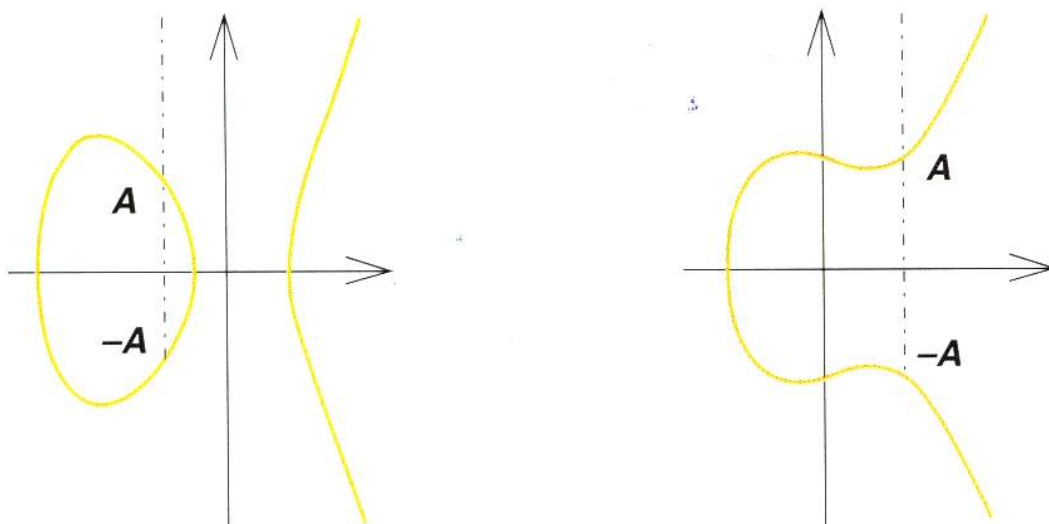
Cette somme définie à partir des points d'une courbe elliptique a les propriétés attendues :  
 1) on peut additionner deux points dans n'importe quel ordre ( $A + B = B + A$ , c'est facile à vérifier). Cette propriété s'appelle la commutativité.  
 2) pour les additionner, on peut grouper les points d'une manière arbitraire (c'est plus difficile à vérifier...mais c'est vrai).

Cette propriété s'appelle l'associativité.

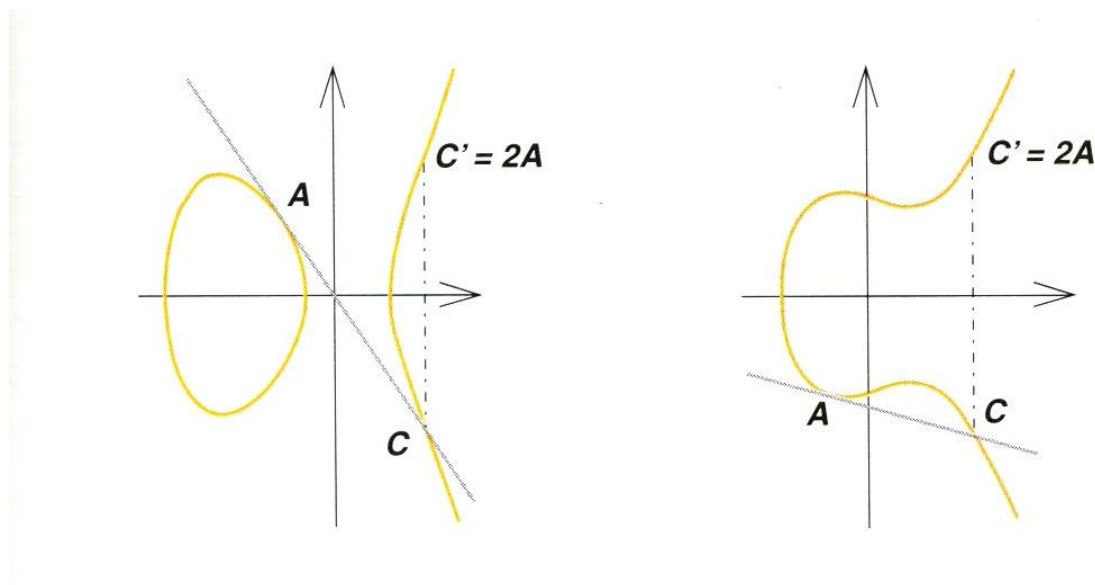
3) il existe un point qui joue le rôle du zéro de l'addition des nombres (on l'appelle l'élément neutre). Ce point que nous noterons O est donc tel que pour tout point A de la courbe  $A + O = A$ . La droite (AO) doit donc recouper la courbe en un point C dont le symétrique C' par rapport à l'axe des abscisses doit être A. D'où la position de C :



et donc (AO) est la verticale passant par A et le point O n'est autre que le point à l'infini défini plus haut (ce point est évidemment son propre symétrique)  
 4) tout point A a un opposé que l'on notera -A c'est le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses. Il vérifie  $A + (-A) = O$



La courbe munie de cette opération a ce qu'on appelle une structure de groupe commutatif comme l'ensemble des nombres réels muni de l'addition. On peut maintenant définir  $A + A$  que l'on notera évidemment  $2A$ . Il suffit de construire une tangente à la courbe (dans ce cas  $A$  et  $B$  sont confondus)



Mais cette opération a des bizarreries. Ainsi il existe des points  $P \neq O$  tels que pourtant  $2P = O$ . Surprenant ! Ce sont les points où la courbe coupe l'axe des abscisses (la vérification est facile) et **ce sont ces trois points qui joueront un rôle dans la démonstration finale de la conjecture.**

### Les courbes (ou fonctions) modulaires

Nous nous contenterons de savoir qu'elles ont des traits communs avec les fonctions circulaires sinus et cosinus. On raconte que le mathématicien EICHLER aurait dit qu'il y avait que cinq opérations fondamentales en arithmétique: l'addition, la multiplication, la soustraction, la division et.....les formes modulaires.

### Vers le dénouement

Le dernier épisode commence au Japon. A Tokyo, quelques années après la seconde guerre mondiale de jeunes étudiants en mathématiques se retrouvent sur les bancs de l'Université.

Écoutons l'un d'eux, Goro SHIMURA : "*Almost all professors were tired, it wasn't very inspiring. All students had to rely on each other to find inspiration. That's when I got close to TANIYAMA. He was not a very careful person. As a mathematician he made a lot of mistakes but he made mistakes in a good direction. He got right out of that. I tried to imitate him but I found out that it was very difficult to make good mistakes.*"

(La majorité des professeurs était lasse, ce qui était très peu propice à l'inspiration. Il fallait donc que les étudiants ne comptent que sur eux mêmes pour trouver de nouveaux sujets de recherches. C'est à cette époque que je me liai à TANIYAMA. Ce n'était pas un mathématicien très rigoureux, il faisait beaucoup d'erreurs mais des erreurs positives. Il s'en sortait toujours. J'essayai de l'imiter, mais je découvris combien c'était difficile.)

En 1955, Goro SHIMURA et Yutuka TANIYAMA énonçaient une conjecture que complétera le français André WEIL en 1967 que nous noterons pour ne vexer personne **la conjecture STW (pour SHIMURA-TANIYAMA-WEIL)**. Il est intéressant de remarquer que dans les pays anglo-saxons elle est connue sous le nom de TANIYAMA-SHIMURA et en FRANCE sous celui de TANIYAMA-WEIL (où va se nicher le chauvinisme!)

Cette conjecture prédit un lien, " un pont ", entre les courbes elliptiques et les formes modulaires. Et FERMAT dans tout cela ? Le lien sera fait au milieu des années 1980 quand le mathématicien américain Ken RIBET prouve une autre conjecture celle de l'allemand FREY qui annonçait que la courbe elliptique d'équation  $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$  où les nombres a et b seraient solutions de l'équation de FERMAT contredirait la conjecture de STW. Et comme cette conjecture, reliée à de nombreux autres phénomènes paraissaient très convaincante, cela renforce la crédibilité de la conjecture de Fermat. Cette démonstration vaudra à RIBET de recevoir en 1989 le prix FERMAT décerné par L'Université Paul Sabatier de Toulouse. Donc vous avez compris le problème : celui qui démontre la conjecture de STW démontre du même coup celle de Fermat. Malheureusement TANIYAMA ne sera pas celui-là : il se suicide en 1958.

Le dernier héros s'appelle **ANDREW WILES** né à Cambridge en 1953. Bien que fortement influencé par son théologien de père, c'est sa mère, professeur de mathématiques qui lui inspira son enthousiasme pour les nombres. A 10 ans, il emprunta à la bibliothèque locale un ouvrage qui retraçait l'historique de la conjecture de FERMAT. WILES se souvient encore de ce qu'il ressentit alors : *" It looked so simple, and yet all the great mathematicians in history couldn't solve it. Here was a problem that I as a 10-year-old could understand, and I knew from that moment that I would never let it to go. I had to solve it "*. (Cela avait l'air si simple et pourtant aucun des grands mathématiciens de l'histoire n'avait pu le résoudre. Il y avait là un problème qu'à dix ans je pouvais comprendre. Et je sus dès cet instant que je ne l'abandonnerais jamais. Il me fallait le résoudre.).

Mais quand, dans les années 1970, il commence son activité de chercheur à l'Université de Cambridge, " Fermat " n'est plus à la mode. Aussi son tuteur le professeur COATES lui conseille de travailler sur les courbes elliptiques. (Le hasard fait bien les choses car à l'époque le lien entre courbes elliptiques et " Fermat " n'est pas encore fait). Deuxième hasard, lors d'une soirée chez des amis, il apprend que Ken RIBET a démontré le lien entre les conjectures STW et Fermat. Il raconte : *" I was just electrified, I knew that moment the course of my life was changing "*. Il abandonne alors toute ses autres recherches, s'isole pendant sept ans pour réaliser la passion de sa jeunesse démontrer la conjecture de Fermat.

Et puis le 23 Juin 1993, à l'Institut Isaac NEWTON de Cambridge, il expose une démonstration de la conjecture de STW dont découle la conjecture de Fermat. Mais très vite on s'aperçoit qu'il y a un " trou " dans la démonstration. WILES, ainsi que d'autres mathématiciens essayent de corriger l'erreur mais, après un an d'échecs, il se résigne à abandonner quand un jour... *"In September I decided to go back and look one more time to try to pinpoint exactly why it was not working,try to formulate it precisely. One can really do that in mathematics,but I just wanted to put my mind at rest that it really wouldn't be made to work. And I was sitting here at the desk,I was trying,convincing myself it didn't work,when suddenly, totally unexpectedly, I had the incredible REVELATION.. .It was the most important moment of my working life. It was so indescribably beautiful, it was so simple and so elegant... I just stared in disbelief for twenty minutes. Then during the day, I walked round the department, I kept coming looking to see if it was still there.. it was still there ! "*

(En Septembre je décidai de m'y remettre une fois de plus pour essayer de déterminer exactement pourquoi cela ne marchait pas, essayer de le formuler précisément, ce que l'on ne peut jamais vraiment faire en mathématique : mais je voulais m'assurer que cela ne pouvait pas marcher, pour avoir l'esprit tranquille. J'étais assis à ce bureau et tout en me persuadant que cela ne marchait pas, j'essayai de voir où était la difficulté. Et alors, subitement, de façon totalement inattendue, j'eus cette incroyable révélation. Ce fut le moment le plus important de ma carrière. C'était d'une beauté si indicible, c'était si simple si élégant. Je regardai ébahi et incrédule pendant vingt minutes. Puis je passai la journée à arpenter le département de mathématiques revenant sans cesse m'assurer que ma trouvaille était encore là. Elle était bien là !).

La preuve tient en un milliers de pages. FERMAT n'avait pas menti : sa marge n'aurait pas suffit ! WILES cite dans son travail plus de soixante articles et livres datant de moins de trente ans et une part importante a moins de dix ans. Il a utilisé les résultats de plusieurs dizaines de spécialistes du monde entier. Il ne lui reste plus qu'à recevoir la médaille Fields (l'équivalent du prix Nobel pour les mathématiciens) traditionnellement donnée à des mathématiciens remarquables de moins de 40 ans (il n'a dépassé l'âge fatidique que de quelques mois !)... et il y a aussi les 300000 francs-or de l'Académie de Paris et le prix Paul WOLFSKEHL !

Les travaux considérables réalisés autour de cette question d'arithmétique ont eu des répercussions sur tout un domaine appelé géométrie algébrique. Ce domaine s'est énormément enrichi. On l'utilise en CAO (conception assistée par ordinateur) pour profiler les carrosseries de voitures et de fusées. Egalement en robotique, pour calculer les contraintes de déplacements d'un robot dans un environnement encombrant.

Il restera des nostalgiques de cette période de quête de l'impossible, des déçus de voir le mythe s'effondrer : *“ Ce mythe aura été aux mathématiques ce qu'avait été, dans la fable de La Fontaine, le trésor du laboureur pour ses enfants : un formidable stimulant pour la recherche qui s'est traduit par une véritable moisson de résultats. ”* (Sciences et Vie, août 1993)





# DE LA DIFFICULTÉ D'ÊTRE MATHÉMATICIEN

Nous l'avons vu, pour Pierre de Fermat et ses contemporains, la recherche mathématique -menée avec passion- a été le moteur d'une nouvelle démarche intellectuelle et idéologique. Comment ont-ils vécu cette aventure ? Avec exaltation sûrement, mais aussi peut-être avec une certaine fragilité, avec des moments de doute et d'incertitude.

William Boyd, dans son roman *Brazzaville Beach*, publié en 1990\*, en faisant d'un mathématicien son héros, a choisi de répondre à cette question -que l'on peut également formuler ainsi : est-il facile d'être un mathématicien ?

Il met en scène un homme tourmenté, John Clearwater, mathématicien de génie en proie aux affres de la recherche, qui tente de résoudre des problèmes jusque là restés sans solution.

John Clearwater est l'époux d'une jeune biologiste, Hope, la narratrice. Elle relate tantôt le passé lointain, quand elle vivait avec John, tantôt sa vie en Afrique, à Grosso Arvore, sur un site où elle observe le comportement des chimpanzés en compagnie d'un groupe de chercheurs. Le thème récurrent de ses fantasmes,angoisses et souffrances, c'est la psychologie complexe, déroutante du chercheur, homme ou femme de passion, à l'anxiété malade et à l'âme tourmentée..

John Clearwater travaille dans un collège à l'Université et tente, en même temps, de mettre en équations des phénomènes difficiles à maîtriser : par exemple la turbulence des eaux, l' " infini du chou " (comment mettre en formule mathématique les ramifications du chou-fleur), le théorème de Fermat.... Peu à peu, il s'enferme dans sa logique de recherche, s'isole des autres, et même de sa jeune femme. Devant des comportements imprévisibles et surprenants, Hope a le sentiment qu'il tombe dans la folie. Par exemple, alors qu' ils sont en vacances en Ecosse, John se met à creuser désespérément un trou. Est-ce le tombeau de ses échecs ? Ou son propre tombeau ?

Cet épisode prémonitoire apparaît comme une manifestation des tendances suicidaires de John. Dans ses travaux, il arrive enfin à une démonstration convaincante, mais ..trop tard ! Une solution a déjà été trouvée par un autre. Désespéré, John sombre dans la dépression. Hope le fait interner dans un hôpital psychiatrique. Après ce traitement (fut-il suffisant ?), John reprend ses travaux mais en vain. Il se suicide Ces souvenirs hantent Hope, elle même confrontée aux égarements et à la jalousie du responsable des recherches sur les chimpanzés. C'est elle qui révèle l'agressivité fondamentale de ces animaux par ailleurs très évolués. Son patron refuse de se rendre à l'évidence jusqu'au jour où il en a la preuve. Il publie alors un livre sur le " cannibalisme " des chimpanzés, sans mentionner le travail de Hope, et la renvoie.

Pour en revenir à John Clearwater, ne retrouvons-nous pas en lui des mathématiciens au destin tragique, comme Cantor qui sombra dans la folie, comme Galois qui disparut au cours d'un duel qu'il appréhendait, comme Taniyama qui se suicida ?

Non, le mathématicien n'est pas un pur esprit. La démonstration du théorème de Fermat met en évidence que les chercheurs en mathématiques ont le goût de l'aventure, qu'ils recherchent l'absolu, qu'ils peuvent être ambitieux et souffrir de déceptions, comme éprouver d' immenses joies lorsqu'ils font une découverte inespérée. Ce cheminement vers la découverte relève aussi de l'expérience mystique car elle tend à l'absolu : quête, interrogations sur des mystères insondables, illuminations lorsqu'éclate la vérité.

\* aux éditions Penguin Books, puis en 1991 aux éditions du Seuil, traduit par Christiane Besse, sous le titre *Brazzaville-plage* (disponible dans la collection Point-Seuil, 1995)



William Boyd est né en 1962 à Accra ( Ghana ) où résidait son père diplomate. Il étudie d'abord dans une Public School en Ecosse, puis entre à l'Université à Glasgow, Nice et Oxford. Enseignant à Oxford, il écrit des romans, des nouvelles et des scénarios pour le cinéma ou la télévision.

Marié, il vit à Londres, mais passe une partie de ses vacances dans une maison du Périgord. Il est devenu un des auteurs les plus doués de sa génération et ses oeuvres sont régulièrement traduites dans plusieurs langues. Il est particulièrement apprécié par les lecteurs français.

Pour illustrer les sentiments que peut éprouver un chercheur, nous vous proposons deux extraits de *Brazzaville Beach*, en anglais, suivis de leur traduction en français.

### **JOHN DIVING HIS HOLE**

*John was on the other side of the wall, in his shirt-sleeves, standing in a freshly dug pit, waist-deep, digging. He was unaware of Hope's approach, so preoccupied was he with his task. He looked round when he heard her laughter.*

*" For God's sake ", she said, " it's a poly bag of chicken bones and potato peelings, not a bloody coffin."*

*He looked, as if for the first time, at his hole and its prodigious depth. His expression was bemused, slightly surprised.*

*He climbed out, smiling vaguely.*

*" Got carried away," he said. Then he dropped his spade. " Hold on, I've...I've got to write something down." He ran into the house. Hope rummaged in the pockets of his jacket, hung on the hinge of the privy door, found his cigarettes and lit one.*

*She smoked her cigarette and was about to go and look for him when he rejoined her. He was frowning. He picked up the spade and looked at it as if it held answer to a baffling question. He throw the bag of rubbish in the pit and began to fill it in.*

*" It's quite extraordinary," he said as he worked. " I started digging. And then my mind.." He paused. " I started thinking." He screwed his face up. " And I worked something out as I was digging," he said slowly, as if he still couldn't believe what had happened. " Something that had been puzzling me for ages. That's why I had to go and write it down."*

*" What ? "*

*" An equation." He started to tell her but she stopped him.*

*He laid the squares of turf over the soil and stamped them down. " Quite weird, " he said. " The whole thing."*

*That evening, after the meal, instead of reading, John sat at the table and worked, steadily covering the pages of her sketch book with the complex hieroglyphics of mathematical formulae.*

*The following day, as they were about to set off, she came out of the front door and found him tying the spade to the crossbar of his bicycle.*

*" O.K.," she said. " What's going on ?"*

*" It's an experiment," he said, smiling. " I want to see if it'll work again. -"*

*So Hope sat and sketched while John dug a hole. He made it six feet square and, working methodically, pausing for a rest from time to time, he had it five feet deep within two hours. He stopped for lunch.*

*" How's it going ? " Hope said.*

*" Nothing yet." He looked vaguely troubled.*

*" You can't just arrange to have a flash of insight, you know, " Hope said, reasonably. " I'm sure Archimedes didn't start bathing several times a day after the eureka business."*

*" You're right," he said. " Probably...But it was definitely something to do with the digging itself. The effort. The logic of digging. Shifting volumes...Deemed to clear something in my mind." He reached for a sandwich. "I'll have one more shot at it after lunch."*

*He started again. Hope watched him enlarge the hole, cutting turf, stacking it neatly, and then sinking the spade into the dark soil, working the blade, loading it and flinging the earth on to its moist pile. There was something satisfying about the work, even she could see that: simple but effortless, and with instant and visible results. The hole grew deeper. Hope went for a walk.*

*When she came back he was sitting down making more notes in her sketch book.*

*" Eureka ? " she asked.*

*" Semi-eureka." He grinned. " Something totally unexpected. Three leaps ahead of where I was, if you see what I mean. In fact I can't quite see where it'll join up yet, but .." He looked suddenly solemn. " It's an amazing idea."*

*She sat and watched him fill the hole in.*

*" But this is the boring part, " she said.*

*" No, no. I'm doing this with gratitude. The hole has worked for me, so I gladly return to its non-hole state."*

*"Jesus Christ."*

*" Up yours." He was happy.*

*Document 23:W. BOYD, Brazzaville-Beach, Penguin p. 108-111*

## **JOHN CREUSE SON TROU**

*John était de l'autre côté du mur, en bras de chemise, enfoui jusqu'à la taille dans un trou qu'il venait et continuait de creuser. Il ne vit même pas Hope approcher tant sa tâche l'absorbait.*

*Il tourna la tête en l'entendant éclater de rire.*

*" Pour l'amour de Dieu, lança-t-elle, il ne s'agit que d'un sac d'os de poulet et d'épluchures de patates, pas d'un foutu cercueil ! "*

*Il examina , comme s'il le voyait pour la première fois, son trou et sa prodigieuse profondeur. Il avait une expression troublée, légèrement surprise.*

*Il s'extirpa , avec un vague sourire.*

*" Je me suis laissé entraîner," dit-il. Il jeta sa pelle. " Attends, il faut...il faut que j'inscrive quelque chose."*

*Il se rua vers la maison. Hope fouilla les poches de sa veste pendue au gond de la porte des cabinets, trouva ses cigarettes et en alluma une.*

*Elle fuma sa cigarette et s'apprêtait à aller voir ce qu'il faisait quand il revint. Il fronçait les sourcils. Il ramassa la pelle et la regarda comme si elle contenait la réponse à une question confondante. Il jeta le sac poubelle dans le trou et entreprit de le combler.*

*" C'est très extraordinaire, dit-il tout en travaillant. Je me suis mis à creuser. Et puis mon esprit.." Il se tut et reprit : " J'ai commencé à réfléchir." Son visage se crispa. " Et j'ai découvert quelque chose pendant que je creusais ", énonça -t-il lentement, comme s'il ne pouvait croire ce qui s'était passé. " Quelque chose qui m'échappait depuis une éternité. C'est pour ça qu'il fallait que je le note par écrit.*

- Quoi donc ?

- Une équation." Il voulut lui expliquer mais elle l'arrêta.

Il disposa les mottes d'herbe par-dessus la terre et les tassa.

" Très bizarre, dit-il. Tout ça."

Le soir, après le dîner, au lieu de lire, il se remit à table et travailla, couvrant d'arrache-pied les pages du carnet de croquis de Hope des hiéroglyphes de formules mathématiques compliquées.

Le lendemain, au moment de partir, elle sortit par la grande porte et le trouva en train d'attacher la pelle au cadre de son vélo.

" Allons bon, dit-elle. Que se passe-t-il ?

- C'est une expérience, répliqua - t-il en souriant. Je veux voir si ça va remarcher."

Ainsi Hope s'installa pour dessiner pendant que John creusait son trou. Un trou de six pieds carrés et, en ouvrant méthodiquement, avec une pause de temps à autre, il en était, deux heures plus tard à cinq pieds de profondeur. Il s'arrêta pour déjeuner.

" Qu'est-ce que ça donne ? s'enquit Hope.

-Rien encore pour l'instant." Il paraissait un peu troublé.

" On ne peut pas organiser un éclair d'inspiration juste à la demande, tu sais, dit-elle, raisonnable. Je suis sûre qu'Archimède ne s'est pas mis à se baigner dix fois par jour après son histoire d'eurêka.

- Tu as probablement raison. Probablement... Mais ça avait définitivement un rapport avec le fait de creuser même. L'effort. La logique de l'acte en soi. De déplacer des volumes... Ça m'a paru clarifier quelque chose dans mon esprit. " Il tendit le bras pour prendre un sandwich.

" Je vais essayer encore un coup après le déjeuner."

Il recommença. Hope le regarda agrandir le trou, découper les mottes d'herbes, les empiler soigneusement, et puis enfoncer la pelle dans le sol noir; manoeuvrer la lame de métal, la charger et rejeter la terre sur le tas humide. La tâche avait quelque chose de gratifiant. Hope elle-même s'en rendait compte: simple, mais physiquement exigeante et avec des résultats immédiatement visibles. Le trou s'approfondissait. Hope partit se promener.

Quand elle revint, John, assis, ajoutait des notes dans le cahier de croquis.

" Eurêka ? s'enquit-elle.

- Demi-eurêka." Il sourit. " Quelque chose de totalement inattendu. Trois bonds en avant d'où j'étais, si tu vois ce que je veux dire. En fait, je ne vois pas encore très bien comment tout ça va s'assembler, mais.." Il prit soudain un air solennel : " C'est une idée très étonnante. "

Elle s'assit et le regarda combler le trou.

" Mais en voilà le côté assommant, dit-elle.

- Non, non. Je le fais avec gratitude. Le trou m'a servi et je suis donc content de le rendre à son état de non-trou.

- Seigneur Jésus !

-Va te faire cuire un oeuf ! " Il était ravi.

Document 23 bis: W. BOYD, Brazzaville-Plage, Points-Seuil, 1993, p.110-112

Faut-il conclure de ces extraits que le " Grand théorème " et autres recherches mathématiques conduisent au suicide ?

Le destin funeste de John Clearwater pourrait le faire croire, mais n'oublions pas que le théorème de Fermat a sauvé la vie de l'allemand Wolfskhel (voir p 29).

### **FERMAT'S LAST THEOREM**

L'imagination de la biologiste surfe sur les formules magiques des mathématiques. Peut-on être poète et mathématicien ?

Homme politique et poète sénégalais, Léopold Senghor affirme : " les mathématiques sont la poésie de la science."

*" A Peano Curve. The Weierstrass Function. The Cauchy Condition. Hospital's Rule. A Moebius Strip. Goldbach's Conjecture. Pascal's Triangle. A Poincaré Map. The Fourier Series. Heisenberg's Uncertainly Principle. A Cantor Dust. A Bolzano Paradox. A Julia Set. Reiman's Hypothesis. And my favorite: Fermat's Last Theorem.*

*What are these things...? Why am I so curious about them...? What is it about these names, these oddly poetic appellations, that is so beguiling and fascinating ? I want to know about them, understand them, find out what they do, what they imply.*

*And this, I suppose, is every mathematician's secret dream. To have a function, a number, an axiom, a hypothesis named after you...I must be like being an explorer on a virgin continent, naming mountains, rivers, lakes and islands. Or a doctor: to have a disease, a condition, a syndrome called after you. There you are on civilization's intellectual map. For ever.*

*Fermat's Last Theorem.*

*Now, bear with me. I love the ring of this one, it sounds so good. Let's see what we can make of it ( I found it hard too : formula have a narcoleptic effect on my brain, but I think I've got it right). Take this simple formula :  $x^2 + y^2 = z^2$  Make the letters numbers. Say :  $3^2 + 4^2 = 5^2$  . All further numbers proportional to these will fit the formula. For example:  $9^2 + 12^2 = 15^2$  . Or taking the proportionality downward :  $12^2 + 5^2 = 13^2$  Intriguing, no ? Another example of the curious magic, the severe grace, of numbers.*

*Along comes Pierre Fermat in the seventeenth century, a civil servant whose hobby was mathematics. He wondered if this same proportionality would apply if you raised the power above two. What if you cubed the numbers ? Would  $x^3 + y^3 = z^3$  ? The answer was no. It never worked, no matter how he raised the power. So he produced his notorious Last Theorem. THERE ARE NO POSITIVE WHOLE NUMBERS, WHATEVER, WHERE 'N' EXCEEDS TWO, SUCH THAT*

$$X^n + Y^n = Z^n .$$

*For four hundred years no one has been able to prove or to disprove Fermat's Last Theorem, and they have checked every power of 'n' from 3 to 125.000. Intriguingly, Fermat himself said at the end of his life that he had the proof, though it was never found when his papers were searched after his death. What I like about Fermat's Last Theorem is that it remains one of those conjectures about the world which are almost indubitably true, that no one would ever deny, but which, in the final analysis, we can't actually, physically prove."*

*Document 22 - Extrait de W Boyd, Brazzaville Beach, Penguin, p.133-135*

## LE DERNIER THEOREME DE FERMAT

*“ Une Courbe de Peano. Les fonctions de Weierstrass. Les conditions de Cauchy. La Règle de L'Hospital. Un ruban de Moebius. L'Hypothèse de Goldbach. Le Triangle de Pascal. Une Carte de Poincaré. Les Séries de Fourier. Le Principe d'Incertitude de Heisenberg. Une poussière de Cantor. Un paradoxe de Bolzano. Un ensemble de Julia. L'Hypothèse de Riemann. Et mon favori: le Dernier Théorème de Fermat.*

*Que sont ces choses...? Pourquoi en suis-je si curieuse...? Qu'y a-t-il dans ces noms, ces appellations, étrangement poétiques, de si séduisant, de si fascinant ? Je veux tout savoir d'eux, les comprendre, découvrir ce qu'ils font, ce qu'ils impliquent.*

*Et c'est là, je suppose, le rêve secret de tout mathématicien. D'avoir une fonction, un nombre, un axiome, une hypothèse nommés d'après soi. Comme l'explorateur d'un continent vierge, baptisant des montagnes, des rivières, des lacs et des îles. Ou un médecin: avoir une maladie, un état, un syndrome portant votre nom. Vous voilà sur la carte intellectuelle de la civilisation. Pour toujours.*

*Le Dernier Théorème de Fermat.*

*Maintenant accordez-moi un peu de patience. J'adore l'allure de celui-ci, il sonne si bien. Voyons ce que nous en tirer (je le trouve difficile aussi : les formules ont un effet narcoleptique sur mon cerveau, mais je crois que je ne me trompe pas ici). Prenez cette simple formule :  $x^2 + y^2 = z^2$  . Remplacez les lettres par des chiffres. Disons :  $3^2 + 4^2 = 5^2$  . Tous les nombres plus élevés proportionnels à ceux là répondront à l'équation. Par exemple  $9^2 + 12^2 = 15^2$  . Ou, si on opère en descendant :  $12^2 + 5^2 = 13^2$  . Intéressant, non ? Un haut exemple de la magie curieuse, de la grâce sévère, des chiffres.*

*Arrive, au XVIIe siècle , Pierre Fermat, un fonctionnaire dont le dada était les mathématiques. Il se demanda si la même proportionnalité s'appliquait quand on augmentait la puissance au-dessus du carré. Qu'advenait-il si on passait au cube ? Aurait-on  $x^3 + y^3 = z^3$  ? La réponse est non. Ça n'a jamais marché, quelle que soit la hauteur donnée à la puissance. C'est ainsi que Fermat énonça son fameux dernier Théorème : SI n EST UN ENTIER POSITIF SUPERIEUR A DEUX, L'EQUATION  $X^n + Y^n = Z^n$  NE PEUT ETRE SATISFAITE PAR DES VALEURS ENTIERES POSITIVES DES INCONNUES x, y, z.*

*Pendant quatre cents ans, personne n'a été capable de prouver ou de réfuter le dernier Théorème de Fermat, et on a vérifié chaque puissance de "n " de 3 à 125 000 . Curieusement, Fermat lui-même déclara , à la fin de sa vie, en avoir la preuve, bien qu'on n'en ait pas trouvé trace dans ses papiers après sa mort. Ce qui me plaît dans le dernier Théorème de Fermat c'est qu'il demeure une de ces hypothèses au sujet du monde qui sont presque indubitablement vraies, que personne ne songerait jamais à nier mais que, en fin de compte, nous ne pouvons en réalité prouver physiquement.*

*Document 22 bis : W. Boyd, Brazzaville-Plage, p. 133-134, Points-Seuil, 1993.*

## POUR EN SAVOIR PLUS

### La vie et l'oeuvre de P. de Fermat

DIOPHANTE d'ALEXANDRIE, *Arithmeticonum Libri.....*, Tolosae, 1670

P. de FERMAT, *Oeuvres*, pub. par A. Tannry et H. Henry, Gauthier-Villars, Paris, 1891-1896

P. de FERMAT, *Varia Opera mathematica*, Tolosae, 1679

Ces trois ouvrages peuvent être consultés à la bibliothèque municipale de Toulouse.

AUDIRAC J.L., *Vie et oeuvre des grands mathématiciens*, Magnard, 1991

DEDRON P. ITARD J., *Mathématiques et mathématiciens*, Magnard, 1980

*Un mathématicien de génie Pierre de Fermat (1601-1665)*, Toulouse, Lycée Pierre de Fermat, 1957. Catalogue de l'exposition organisée par la Bibliothèque municipale de Toulouse et les Archives Départementales à l'occasion de la dénomination du Lycée national de garçons de Toulouse.

### Histoire des mathématiques

DAHAN DALMEDICO A. et PEIFFER J., *Une histoire des mathématiques*, Points-Seuil, 1986

RENOUVEAU COLETTE, *Histoire des mathématiques*, PUF, 1975.

DOSSIERS POUR LA SCIENCE, *Les mathématiciens*, Janvier 1994, n°195.

IREM, *L'OUVERT*, n° 73, Strasbourg.

*TANGENTES*, n° 8, Editions Archimède.

*Histoire des mathématiques pour les collèges*, IREM. Collection Activités et réalités mathématiques, CEDIC, 1980.

### Le Théorème de Fermat et la théorie des nombres

*QUADRATURE*, n°22, *Grand théorème de Fermat*, été 95.

ITARD J., *Arithmétique et théorie des nombres*, QSJ, PUF, 1973

CARON J L, *Jeux de nombres*, Retz, 1994.

*LA RECHERCHE*, n° hors série, *Les nombres*, Juillet-août 95.

*POUR LA SCIENCE*, n°195, " Voyage au pays de Fermat ", Yan Stewart.



# Philosophie des mathématiques et psychologie des mathématiciens

NIMIER, *Mathématiques et affectivité*, Stock

NIMIER, *Psychologie des professeurs de mathématiques*.

BARBIN E. et CAVEING M., *Les philosophes et les mathématiques*, IREM Ellipses, 1996

## Document audiovisuel

*Pierre de Fermat, le premier homme du monde*, vidéogramme et brochure présentés par Maryvonne Spiesser, CDDP Midi-Pyrénées, Toulouse, 1996

## A visiter

La maison de Fermat (3 rue Pierre-de-Fermat, Tél: 05 63 02 42) à Beaumont de Lomagne (Tarn et Garonne) propose des expositions sur le Théorème de Fermat et l'histoire des mathématiques

Projet de créer, en cette maison natale de Pierre de Fermat, une Maison des mathématiques; des animations seraient proposées à différents niveaux: scolaires, grand public, colloques de spécialistes

# SOLUTIONS DES EXERCICES

## Exercice 1 (page 8)

La solution de cet exercice se lit sur la figure

## Exercice 2 (page 8)

\*Première possibilité :

$$\text{aire}(ABCD) = \text{aire}(A'B'C'D') + 4\text{aire}(AA'D')$$

$$\text{soit } (a+b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$$

$$\text{soit } a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$\text{et donc } a^2 + b^2 = c^2$$

\* Deuxième possibilité:

$$4 \text{aire}(AA'B) + \text{aire}(A'B'C'D') = \text{aire}(ABCD)$$

$$\text{et donc } 4\left(\frac{ab}{2}\right) + (a-b)^2 = c^2$$

$$\text{soit encore en développant } a^2 + b^2 = c^2$$

## Exercice 3 (page 9)

On a  $\text{aire}(BKE) = \text{aire}(BAE)$  même base BE et même hauteur BK

$$\text{aire}(BAE) = \text{aire}(BCF)$$

$$\widehat{EBA} = \widehat{CBF}, \quad BA = BF \text{ et } BE = BC..$$

$\text{aire}(BFC) = \text{aire}(BFA)$  même base FB et même hauteur AB

d'où  $\text{aire}(BKLE) = 2 \text{aire}(BKE) = 2 \text{aire}(BFA) = \text{aire}(BFGA)$ .

On démontrerait de même que :  $\text{aire}(AHIC) = \text{aire}(KLDC)$

et donc :

$\text{aire}(BFGA) + \text{aire}(AHIC) = \text{aire}(BCDE)$  c'est à dire l'égalité de Pythagore.

### Exercice 4 (page 9)

On a : aire(ABCD) =  $\frac{(a+b)(a+b)}{2} = \frac{(a+b)^2}{2}$  et aussi aire (ABCD) = aire (ABC) + aire (CDE) + aire (BCE) = soit :  $\frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{ab}{2}$

d'où en développant le premier membre et en simplifiant :  $a^2 + b^2 = c^2$

### Exercice 5 (page 10)

On a :  $x^2 + y^2 = (m^2 - n^2)2 + (2mn)^2 = m^4 + n^4 - 2m^2n^2 = m^4 + n^4 + 2m^2n^2 = (m^2 + n^2)2 = z^2$

On a :  $(kx)^2 + (ky)^2 = k^2x^2 + k^2y^2 = k^2(x^2 + y^2) = k^2z^2$  (puisque  $x^2 + y^2 = z^2$ ) et donc  $(kx)^2 + (ky)^2 = (kz)^2$  et (kx, ky, kz) est un triplet pythagoricien.

### Exercice 6 (page 22)

1) On a  $1^2 + 1^2 = x^2$  d'où  $x^2 = 2$

2) si  $x = \frac{a}{b}$  alors  $x^2 = \frac{a^2}{b^2}$  et comme  $x^2 = 2$  alors  $\frac{a^2}{b^2} = 2$  soit  $a^2 = 2b^2$

a et b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a^2$ Et $b^2$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$2b^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

Les seules possibilités pour avoir  $a^2 = 2b^2$  sont:

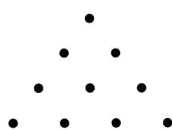
- . a et b se terminent tous les deux par 0
- . a se termine par 0 et b se termine par 5.

et donc a et b sont tous les deux multiples de 5 ce qui contredit l'hypothèse que la fraction  $\frac{a}{b}$  est irréductible.

### Exercice 7 (page 24)

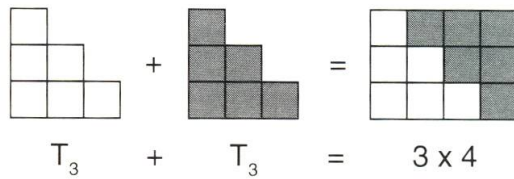
1)  $T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6, T_4 = 10$

$T_5 = 1+2+3+4+5 = 15, T_6 = 21, T_7 = 28, T_8 = 35, T_9 = 44, T_{10} = 54$  et par exemple  $T_4$  se représente par :



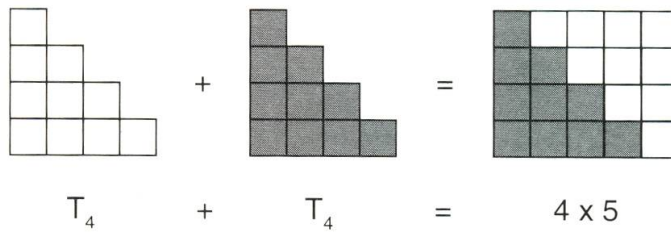
2)

2.



$$2T_3 = 3 \times 4$$

$$T_3 = \frac{(3 \times 4)}{2} = 6$$



$$2T_4 = 4 \times 5$$

$$T_4 = \frac{(4 \times 5)}{2} = 10$$

De même  $T_8 + T_8 = 8 \times 9$

$$2 T_8 = 8 \times 9$$

$$T_8 = \frac{(8 \times 9)}{2} = 36$$

d'où en généralisant  $1+2+3+\dots+23 = \frac{(23 \times 24)}{2}$

$$\text{et } 1+2+3+\dots+n = n \frac{n(n+1)}{2}$$

3) Si  $x$  est le nombre de pièces retirées dans le premier coffre alors le nombre de pièces dans chaque coffre au départ est  $100x+1$  (d'après la situation du dernier coffre)

L'énoncé dit que  $(99x+1) + (98x+1) + (97x+1) + \dots + 2+1 = 14950$

45

D'après le résultat obtenu à la fin de la deuxième question on a :

$$1+2+3+\dots+99 = \frac{(99 \times 100)}{2} = 4950 \text{ d'où } x = 3$$

45

# INDEX

**Boyd (William)** : 35,36  
**Calcul infinitésimal** : 13,17  
**Correspondance (épistolaire)** : 13,16  
**Courbe elliptique** : 30, 31  
**Descartes** : 13, 14, 16, 17 18  
**Descente infinie:** 13, 28  
**Diophante** : 10,13, 21, 25, 27  
**Équation** : 10, 25, 27, 38, 40  
**Euclide** : 9, 10, 21, 22  
**Exposant** : 10, 27, 28, 29  
**Forme modulaire** : 30, 32, 33  
**Galilée** : 16,17  
**Jeu (de hasard)** : 19, 20  
**Mersenne (père Marin)** : 13, 14, 16  
**Nombre entier** : 10, 23, 27, 28  
**Nombre premier** : 21, 28  
**Nombre triangle** : 24  
**Pascal** : 13, 14, 16, 17, 19, 20, 40  
**Probabilités** : 13, 18, 19, 20  
**Puissance** : 26, 27, 28, 40  
**Pythagore:** 7, 10, 21, 22, 23  
**Raisonnement par l'absurde:** 28  
**Rationalisme** : 15, 16  
**Ribet (Ken)** : 33  
**Shimura (Goro)** : 32  
**Taniyama (Yutuka)** : 32, 33  
**Théologie** : 15  
**Théorème de Pythagore** : 7, 10, 22, 43  
**Théorie des nombres** : 6, 13, 21, 29  
**Triangle rectangle** : 7, 8, 9, 10, 11  
**Triplet pythagoricien** : 10, 11, 27  
**Weil (André)** : 33  
**Wiles (Andrew):** 4, 6, 33, 34  
**Wolfskhel (Paul)** : 29, 34